УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18я7

Т. И. БЕЛЫХ
кандидат физико-математических наук, доцент,
Байкальский государственный университет экономики и права

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЧЕБЫШЕВСКИХ ТОЧЕК ПРИ ИССЛЕДОВАНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматриваются методы чебышевских точек в задачах исследования динамических систем при аппроксимации множеств достижимости множествами простой структуры: шарами, кубами, параллелепипедами.

Ключевые слова: аппроксимация; выпуклый многогранник; динамическая система; задача линейного программирования; чебышевский центр.

T. I. BELYKH
PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Baikal State University of Economics and Law

METHODS OF CHEBYSHEV POINTS IN STUDYING DYNAMICAL SYSTEMS

The article deals with the methods of Chebyshev points in studying dynamical systems while approximating attainability sets by the sets of a simple structure: balls, cubes, parallelepipeds.

Keywords: approximation; convex polyhedron; dynamic system; linear programming problem; Chebyshev center.

Математическая модель поведения некоторого объекта во времени описывается системой линейных разностных уравнений [2]:

$$x^{i+1} = x^i + A_i x^i + B_i u^i,\ \ x(0) = x^0,\ i = 1, 2, \ldots, T; \qquad (1)$$

$$x^i \in R_x^i = \{x^i \in E^n : C^i x^i \le c^i\} \subset E^n;$$
$$u^i \in R_u^i = \{u^i \in E^m : A^i u^i \le b^i\} \subset E^m, \qquad (2)$$

где C^i — $(r_i \times n)$ матрица, $c^i \in E^{r_i}$; A^i — $(l_i \times m)$ матрица, $b^i \in E^{l_i}$.

Множество достижимости системы (1), (2) в момент времени i обозначим через X^i. Задача состоит в том, чтобы во множество $X^i \cap R_x^i$ вписать n-мерный шар (куб) $\underline{B}^i$ максимального объема и вокруг множества $X^i \cap R_x^i$ описать параллелепипед $\overline{B}^i$ минимального объема. Очевидно, что справедливы следующие включения: $\underline{B}^i \subset X^i \cap R_x^i \subset \overline{B}^i$. Множества $\underline{B}^i$ и $\overline{B}^i$ будем называть простейшими аппроксимациями множества достижимости $X^i \cap R_x^i$.

В математической литературе известны более точные аппроксимации множеств достижимости, например, эллипсоидами [6], выпуклыми многогранниками [5]. Однако именно аппроксимации множеств достижимости шарами, кубами, параллелепипедами, несмотря на их грубость, наиболее часто применяются при практических исследованиях динамических систем, например в задачах развития систем энергетики в условиях неопределенности.

Рекуррентно выражая правую часть каждого уравнения системы линейных разностных уравнений (1) через начальные условия, будем иметь:

$$x^i = \prod\nolimits_{j=0}^{i-1}(E + A_j)x^0 + \prod\nolimits_{j=1}^{i-1}(E + A_j)B_0 u^0 +$$
$$+ \prod\nolimits_{j=2}^{i-1}(E + A_j)B_1 u^1 + \ldots + B_{i-1}u^{i-1}.$$

После соответствующих обозначений, получим

$$x^i = D^i s_i + d^i,$$

где D^i — матрица размерности $(n \times (m \times i))$; $d^i \in E^n$ — заданный вектор; $s^i = (u^0, \ldots, u^{i-1}) \in E^{m \times i}$.

Задача, которую мы сформулировали, эквивалентна аппроксимации вписанным шаром (кубом) максимального объема не пустого и ограниченного множества

$$R^i = \{x^i \in E^n : x^i = D^i s^i + d^i,\ \overline{A}^i s^i \le b^i,\ x^i \in R_x^i\}, \qquad (3)$$

где $\overline{A}^i = (A^0, \ldots, A^{i-1})^T$ — матрица размерности $(l_i \times (m \times n))$; $\overline{b}^i = (b^0, \ldots, b^{i-1})^T \in E^{m \times i}$.

Известно [1], что решение задачи об аппроксимации выпуклого многогранника R, заданного явно, максимальным шаром (кубом) $\underline{B}^i$ с центром в точке x^i радиуса r^i эквивалентно решению задачи линейного программирования вида:

$$\min\{x_{n+1} : \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j - c_k \le N_k x_{n+1},\ k = \overline{1,\ r_i}\},$$

где x^i — центр шара (куба); $r^i = x_{n+1}$ — радиус шара (куба); $N_k = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^2}$ — для шара; $N_k = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |c_{kj}|}$ — для куба.

Точку x^i называют чебышевской точкой системы линейных алгебраических неравенств: $C^i x \le c^i$ [4].

Решение задачи (3) осложняется неявным заданием множеств R^i.

Пусть $\{x^{i0},\ x^{i0}_{n+1}\}$ чебышевский центр множеств $R^i_x \supset R^i$, причем $x^{i0} \in R^i$. Найдем s^{i0}, α^{i0} из решения задачи:

$$\min_{\|\alpha^i\|\le 1}\max_{x\in R^i} \alpha^{t'}(x^i - x^{i0}) = \min_{\|\alpha^i\|\le 1}\max_{s\in R^i_s} \alpha^{t'}(D^i s^i - \overline{x}^{i0}),$$

где $R^i_s = \{s^i : \overline{A}^i s^i \le b^i\}$; $\overline{x}^{i0} = d^i - x^{i0}$.

Согласно построению точка $\overline{x}^{i0} = D^i s^{i0} + d^i$ принадлежит границе R^i. В том случае, если точка $\overline{x}^{i0}$ не содержится внутри множества $\underline{B}^0$, т.е. $\overline{x}^{i0} \in \operatorname{int}\underline{B}^0$, то $\underline{B}^0$ есть шар максимального объема, вписанный в R^i, т.е. $\underline{B}^0$ — решение исходной задачи. Если это не так, то построим полупространство $\alpha^{i0'}(x^i - \overline{x}^{i0}) \le 0$, опорное в точке $\overline{x}^{i0}$ к множеству R^i и отсекающее от множества R^i часть шара $\underline{B}^0$. После этого сформируем множество

$$R^{i1} = \{x^i : x^i \in R^i_x,\ \alpha^{i0'}(x^i - \overline{x}^{i0}) \le 0\}.$$

Найдем шар максимального объема $\underline{B}^{i1}$, вписанный в $R^{i1} \supset R^i$, с центром в точке x^{i1}. Пусть точка x^{i1} принадлежит R^{i1}. Проверим, содержится ли шар $\underline{B}^{i1}$ во множестве R^i. Для этого найдем s^{i1}, α^{i1} из решения задачи

$$\min_{\|\alpha^i\|\le 1}\max_{s\in R^i_s} \alpha^{t'}(D^i s^i - \overline{x}^{i1}),$$

где $R^i_s = \{s^i : \overline{A}^i s^i \le b^i\}$; $\overline{x}^{i1} = d^i - x^{i1}$.

Определим $\overline{x}^{i1} = D^i s^{i1} + d^i$. Если точка $\overline{x}^{i1}$ не содержится внутри множества $\underline{B}^{i1}$, то $\underline{B}^{i1}$ есть решение исходной задачи. Иначе построим полупространство $\alpha^{i1'}(x^i - \overline{x}^{i1}) \le 0$, опорное в точке $\overline{x}^{i1}$ к множеству R^i и отсекающее от множества R^i часть шара $\underline{B}^{i1}$. Затем найдем новое приближение и продолжим итерационный процесс. На k-ом шаге итерационного процесса $\overline{x}^{ik}$ не принадлежит множеству R^{ik}. Тогда для построения отсечения решим вспомогательную задачу $\min\{\| x - x^{ik} \| : x \in R^i\}$. Пусть точка $\overline{x}^{ik}$ разрешает вспомогательную задачу, положим $\alpha^{ik} = \overline{x}^{ik} - x^{ik}$. Построим отсекающее полупространство $\alpha^{ik'}(x^i - \overline{x}^{ik}) \le 0$, не содержащее $\overline{x}^{ik}$. Сформируем множество $R^{ik} = \{x : x \in R^{ik-1},\ \alpha^{ik}(x^i - \overline{x}^{ik}) \le 0\}$, найдем его чебышевский центр и продолжим итерационный процесс. Построенная последовательность шаров $\underline{B}^k$ сходится к шару $\underline{B}^*$, разрешающему исходную задачу (1), (2). Доказательство аналогично [3].

Для того, чтобы вокруг множества $X^i \cap R^i_x$ описать параллелепипед $\overline{B}^i$ минимального объема, нужно решить $2n$ задач линейного программирования вида:

$$\underline{x}_i = \operatorname{argmin}\{x_i : x,\ s \in R^i\},\ i = \overline{1,\ n};$$

$$\underline{x}_i = \operatorname{argmax}\{x_i : x,\ s \in R^i\},\ i = \overline{1,\ n}.$$

Тогда параллелепипед минимального объема $\overline{B}^i$ имеет следующий вид:

$$\overline{B}^i = \{x : \underline{x}_i \le x \le \overline{x}_i\},\ i = \overline{1,\ n}.$$

Список использованной литературы

1. Ащепков Л. Т. О построении максимального куба, вписанного в данную область / Л. Т. Ащепков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — № 2. — С. 510–513.
2. Белых Т. И. Методы чебышевских точек выпуклых множеств и их приложения / Т. И. Белых, В. П. Булатов, Э. Н. Яськова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 1. — С. 18–32.
3. Булатов В. П. Методы погружения в задачах оптимизации / В. П. Булатов. — Новосибирск : Наука, 1977. — 154 с.
4. Зуховицкий С. И. Линейное и выпуклое программирование / С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. — М. : Наука, 1964. — 460 с.
5. Лотов А. В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями / А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 15–23.
6. Черноусько Ф. Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей при помощи эллипсоидов / Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1980. — № 3–5.

References

1. Ashchepkov L. T. O postroenii maksimal'nogo kuba, vpisannogo v dannuyu oblast' / L. T. Ashchepkov // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1980. — № 2. — S. 510–513.

2. Belykh T. I. Metody chebyshevskikh tochek vypuklykh mnozhestv i ikh prilozheniya / T. I. Belykh, V. P. Bulatov, E. N. Yas'kova // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2008. T. 48, № 1. — S. 18–32.

3. Bulatov V. P. Metody pogruzheniya v zadachakh optimizatsii / V. P. Bulatov. — Novosibirsk : Nauka, 1977. — 154 s.

4. Zukhovitskii S. I. Lineinoe i vypukloe programmirovanie / S. I. Zukhovitskii, L. I. Avdeeva. — M. : Nauka, 1964. — 460 s.

5. Lotov A. V. Chislennyi metod postroeniya mnozhestv dostizhimosti dlya lineinykh upravlyaemykh sistem s fazovymi ogranicheniyami / A. V. Lotov // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1975. — T. 15, 1. — S. 15-23.

6. Chernous'ko F. L. Optimal'nye garantirovannye otsenki neopredelennostei pri pomoshchi ellipsoidov / F. L. Chernous'ko // Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. — 1980. — № 3–5.

Информация об авторе

Белых Татьяна Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и кибернетики, Байкальский государственный университет экономики и права, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: belych-ti@isea.ru.

Author

Belykh Tatyana Ivanovna — PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Computer Science and Cybernetics, Baikal State University of Economics and Law, 11, Lenin Street, Irkutsk, 664003, e-mail: belych-ti@isea.ru.