И.А. Никифорова
Е.В. Аксенюшкина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

В двух частях

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Байкальский государственный университет

И.А. Никифорова
Е.В. Аксенюшкина

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

В двух частях

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Иркутск
Издательство БГУ
2017

УДК 519.86 (078.5)
ББК 22.193я7
Н62

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Срочко
канд. техн. наук, доц. Н.П. Шерстянкина

Никифорова И.А.
Н62 Математические методы и модели: компьютерное моделирование [Электронный ресурс] : учеб. пособие : в 2 ч. / И.А. Никифорова, Е.В. Аксенюшкина. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2017. – Ч. 1 : Линейные оптимизационные модели. – 107 с. – Режим доступа: http://lib-catalog.isea.ru.

Содержит теоретические положения и методику выполнения индивидуальных и лабораторных работ по темам математического моделирования производственного и финансового менеджмента. В качестве инструментального средства используется стандартная офисная программа *MS Excel*. Изложены основные математические понятия, применяемые в экономике. Материал каждой главы проиллюстрирован примерами и сопровождается подборкой задач экономического содержания.

Для студентов бакалавриата и магистратуры всех экономических специальностей при изучении ими курсов «Методы оптимальных решений», «Математические методы и модели».

УДК 519.86 (078.5)
ББК 22.193я7

Оглавление

1. Экономико-математическое моделирование

Важным методом исследования в экономике, как, впрочем, и в других науках, является моделирование. По А.А. Ляпунову, «моделирование – это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель):

- находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;
- способная замещать его в определенных отношениях;
- дающая при ее исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте» [30].

В экономических исследованиях, как правило, невозможно провести натурный эксперимент или найти материальный аналог исследуемого объекта. Поэтому используют идеальные модели, т.е. умозрительные подобия реальных систем, процессов, явлений. Идеальная модель может быть интуитивной или знаковой.

Интуитивная модель – это неформализованная совокупность индивидуальных или групповых представлений об объекте. Знаковая модель описывается выражениями некоторого формального языка с указанием правил их преобразования и интерпретации. Интерпретация устанавливает соответствие между моделью и реальностью, образом и прообразом.

Математическая модель – это знаковая модель, которая описана на языке математики и может быть исследована средствами математики. Такая модель использует формализации постулируемых свойств моделируемого объекта в качестве исходных предположений. Она сопоставляет элементам объекта, характеристикам внешней среды и связям между ними некоторые абстракции (параметры, переменные, функции и пр.) и связывающие их математические соотношения.

Экономико-математические модели позволяют подключать обширный математический аппарат к анализу теоретических и прикладных проблем экономики. Кроме того, они предоставляют экономистам удобный и компактный язык для изложения гипотез, обоснований, результатов.

Требования к модели противоречивы. В статье «Простые математические модели и их роль в постижении мира» академик Ю.И. Неймарк перечисляет советы (иначе он называет их «подсказками»), которые предлагает «осмыслить и умеренно им следовать при составлении математических моделей.

1. Чем проще модель, тем меньше возможность ошибочных выводов.
2. Модель должна быть простой, но не проще, чем это возможно.
3. Пренебрегать можно чем угодно, нужно только знать, как это повлияет на решение.
4. Модель должна быть грубой: малые поправки не должны кардинально менять ее поведение.
5. Модель и расчет не должны быть точнее исходных данных».

Кроме того, автор подчеркивает, «что, составляя математическую модель, желательно знать, что вы хотите от нее узнать и каковы основные факторы реальной системы, которые могут дать ответы» [29].

Таким образом, модель должна быть достаточно полной, т.е. в ней должны учитываться все важные факты, от которых существенно зависит принятие правильного решения в рассматриваемой вами экономической ситуации. С другой стороны, модель должна быть достаточно простой для того, чтобы можно было увидеть связь между входящими в нее параметрами. При моделировании можно пренебрегать различными условиями, если известно, как это может отразиться на конечном результате, поскольку множество мелких и второстепенных факторов может существенно усложнять получение результата. Одним словом, искусство составлять математические модели есть именно искусство, однако моделированию можно научиться, изучая примеры успешного применения математических моделей в разных ситуациях и следуя известным советам опытных ученых и практиков. Последнее важно, в частности, и потому, что «не всегда при математическом моделировании нужно что-то изобретать: очень часто можно воспользоваться существующими типовыми простыми моделями и их сочетаниями. Хотя и это может оказаться не таким уж очевидным» [29].

2. Классификация экономико-математических моделей

В основу классификации математических моделей можно положить различные принципы.

По целевому назначению экономико-математические модели делятся:

- на теоретико-аналитические, используемые в исследовании общих свойств и закономерностей экономических процессов;
- прикладные, используемые для решения конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирование, управление).

По характеру отражения причинно-следственных связей различают модели жестко детерминированные (в них исходные данные заданны определенными величинами) и модели, учитывающие случайность и неопределенность.

По способам отражения фактора времени экономико-математические модели делятся на статические и динамические. В статических моделях все зависимости относятся к одному моменту времени. Динамические модели характеризуют изменение экономических процессов во времени.

Наконец, если исходить из общих задач моделирования, можно выделить:

- дескриптивные (описательные) и нормативные модели;
- оптимизационные модели;
- многокритериальные модели;
- игровые модели.

Дескриптивные модели объясняют наблюдаемые факты или дают вероятностный прогноз. Нормативные модели отвечают на вопрос: как это должно быть? Другими словами, предполагают целенаправленную деятельность. Примером нормативной модели являются модели оптимального планирования, формализующие тем или иным способом цели экономического развития, возможности и средства их достижения.

Дескриптивный подход применяется для установления статистических закономерностей экономических процессов, изучение вероятных путей развития каких-либо процессов при не изменяющихся условиях или протекающих без внешних воздействий. Примерами дескриптивных моделей являются производственные функции и функции покупательного спроса, построенные на основе обработки статистических данных.

Одними из наиболее распространенных моделей в экономике являются оптимизационные. Они используются для описания процессов, на которые можно воздействовать, пытаясь добиться достижения заданной цели. В этом случае в модель входит один или несколько параметров, доступных влиянию. Например, меняя тепловой режим в зернохранилище, можно задаться целью подобрать такой режим, чтобы достичь максимальной сохранности зерна, т.е. оптимизировать процесс хранения.

В теории рыночной экономики оптимизационные модели присутствует в основном на микроуровне (максимизация полезности потребителем или прибыли фирмой); на макроуровне результатом рационального выбора поведения экономическими субъектами оказывается некоторое состояние равновесия. Отличительными признаками оптимизационных моделей являются:

- наличие одного или нескольких критериев оптимальности (наиболее типичными критериями в экономических задачах являются: максимум дохода или прибыли, минимум издержек, минимальное время для проведения технологических операций и т.д.);
- система ограничений, которая формируется исходя из содержательного смысла задачи и представляет собой систему уравнений или неравенств.

Многокритериальные модели. Нередко приходится оптимизировать процесс по нескольким параметрам одновременно, причем цели могут быть весьма противоречивыми. Например, зная цены на продукты и потребность человека в пище, нужно организовать питание больших групп людей (в армии, детском летнем лагере и др.) физиологически правильно и одновременно с этим как можно дешевле. Ясно, что эти цели совсем не совпадают, т.е. при моделировании будет использоваться несколько критериев, между которыми нужно искать баланс.

Игровые модели связаны со специальным разделом современной математики – теорией игр, изучающий методы принятия решений в условиях неполной информации.

3. Этапы экономико-математического моделирования

На первом этапе исследователь наблюдает объект и выявляет проблему, описывает (на естественном языке) объект, проблему и цель исследования. Нужно выделить существенные (по отношению к проблеме) свойства объекта, изучить его структуру (элементы и связи между ними) и внешнюю среду. Следует сформулировать известные факты и правдоподобные гипотезы, связанные с поведением объекта, в частности с его реакцией на изменения внешних условий.

Второй этап – формализация описаний, выполненных на первом этапе, конструирование модели. Элементами экономико-математической модели являются показатели (параметры, переменные), соотношения между ними и формулировка цели исследования на языке модели.

На третьем этапе происходит исследование модели как «заменителя» реального объекта. Простейшая форма такого исследования – модельный эксперимент, в ходе которого изучают реакцию модели на различные значения входных параметров. Прикладные исследования чаще всего нацелены на поиск управляющих воздействий (решений), которые приводят объект в желательное состояние. В таком случае нужно выяснить, при каких условиях искомое воздействие существует (задача разрешима). Затем необходимо подобрать или разработать алгоритм, позволяющий найти решение задачи, если оно существует.

Четвертый этап заключается в интерпретации результатов третьего этапа, вследствие чего происходит «перенос» знаний с модели на исследуемый объект. Может оказаться, что интерпретация какого-то результата, полученного при анализе модели, противоречит накопленным знаниям об объекте. В таком случае приходится вернуться на третий этап для корректировки модели.

Наконец, на пятом этапе новые знания используют для достижения цели исследования: развития теории, управления объектом или прогнозирования его поведения.

При циклическом повторении описанных процедур экономико-математического моделирования обогащение знаний об объекте способствует совершенствованию модели, а это, в свою очередь, позволяет добыть новые знания.

Немаловажным для этого этапа является решение задачи, сформулированной по результатам анализа проблемы и анализ чувствительности полученного решения. Это подразумевает получение дополнительной информации о поведении решения при изменении некоторых параметров модели. Анализ чувствительности особенно необходим, когда невозможно оценить параметры модели. В данном случае важно изучить поведение решения в окрестности первоначальных оценок параметров модели.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются, во-первых, анализ экономических объектов и процессов; во-вторых, экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов; в-третьих, выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии. Следует, однако, иметь в виду, что далеко не во всех случаях данные, полученные в результате экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно, как готовые управленческие решения. Они скорее могут быть представлены как «консультирующие» средства. Принятие управленческих решений остается за человеком. Таким образом, экономико-математическое моделирование является лишь одним из компонентов (пусть очень важным) в процессе планирования экономических процессов и управления ими.

4. Постановка задач линейного программирования

В рамках рассматриваемого пособия мы не ставим перед собой задачу «окунуть» обучающихся в сложный мир сугубо реальных практических ситуаций. Первым шагом к этому может служить получение навыков построения моделей в учебных задачах. Задачи, которые мы рассмотрим далее, относятся к оптимизационным: это задачи линейного программирования. Наша цель – построение математических моделей, решение задач при помощи стандартной офисной программа *MS Excel*, интерпретация и анализ реакции решений на изменение параметров задачи (анализ на устойчивость, анализ чувствительности полученного решения, постоптимальный анализ).

Линейное программирование – это раздел математики, в котором изучаются задачи на максимум или минимум линейной функции многих переменных при ограничениях на них в форме линейных равенств и неравенств. Термин «программирование» – не совсем удачный перевод английского слова programming, которое правильнее перевести как «планирование», что объясняется областью применения этой дисциплины. Методы линейного программирования оказались весьма эффективными при решении многих экономических задач, возникающих в производстве, торговле, управлении финансами, когда целью является максимизация или минимизация некоторого экономического показателя (максимизация прибыли или объема выпуска продукции, минимизация затрат сырья или транспортных расходов). Создателями линейного программирования были советский математик, нобелевский лауреат Л.В. Канторович, впервые сформулировавший задачу линейного программирования, описывающую реальную экономическую ситуацию (1939 г.), и американский ученый Дж. Данциг – автор знаменитого симплекс-метода решения задач линейного программирования (1947 г.).

Математическая постановка общей задачи линейного программирования имеет следующий вид.

Найти максимум (или минимум) линейной функции

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \ (\min), \tag{1}$$

от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих m линейным ограничениям в форме равенств или неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=, \ge)\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=, \ge)\, b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=, \ge)\, b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Часто в экономических задачах отдельно записываются условия неотрицательности переменных, обусловленные реальной сущностью экономических показателей:

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Функция $f(x)$ носит название *целевой функции*. Ее коэффициенты c_j образуют вектор $c=(c_1, c_2, ..., c_n)$, называемый *целевым вектором*. Любой вектор $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, координаты которого удовлетворяют условиям (2), (3), называется *допустимым планом (допустимым вектором, допустимой точкой)* задачи линейного программирования. Все они образуют множество X допустимых планов задачи. План $x^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$, доставляющий целевой функции $f(x)$ наибольшее (или наименьшее) значение, называется *оптимальным планом* задачи линейного программирования. Ограничения (2) будем называть *основными ограничениями*, правая их часть – вектор $b=(b_1, b_2, ..., b_m)$ – называется *вектором ограничений*. Коэффициенты левых частей основных ограничений составляют матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую называют *матрицей условий или технологической матрицей*.

Если все основные ограничения одного типа $\le(=,\ge)$, задачу (1)–(3) можно представить в компактной *векторно-матричной записи*:

$$f(x)=\langle c, x\rangle \to \max(\min), \ \ Ax \le (=,\ge) b, \quad x \ge 0,$$

где выражение $\langle c, x\rangle$ означает скалярное произведение векторов *c* и *x*.

В пособии приводится целый спектр задач из различных областей экономики, финансов и менеджмента, математические модели которых являются задачами линейного программирования. Для некоторых из задач построены математические модели, остальные предлагаются студентам для самостоятельной работы.

Одной из первых известных классических задач линейного программирования является производственная задача. В следующем разделе рассмотрена задача о производстве шоколада, построена математическая модель, описано решение и анализ задачи как геометрически, так и в *MS Excel*. В производственных задачах представляют интерес вопросы оценки влияния изменения спроса, запасов сырья, а также цен выпускаемой продукции на оптимальное решение задачи.

Постоптимальный анализ дает возможность заменить решение некоторого комплекса линейных задач, что придает рассматриваемой модели динамичность, позволяющую проанализировать в совокупности влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение. В производственных задачах проводится исследование деятельности предприятия на моделях, динамические характеристики которых отображают возможные изменения, связанные с реальными экономическими ситуациями, поскольку вначале полученное решение в этих условиях уже может не являться оптимальным.

5. Оптимальный план производства и анализ устойчивости производственной деятельности предприятия

Рассмотрим пример 1.

Кондитерская фабрика в Покрове выпустила пробную партию новых видов шоколада «Восхищение» и «Лакомка». Для изготовления этого шоколада было закуплено высококачественное сырье, расход которого на производство шоколада приведен в табл. 1.

Таблица 1

Ресурсы	Норма расхода ресурсов на 1 кг шоколада, усл. ед.		Запас ресурсов, усл. ед.
	«Восхищение»	«Лакомка»	
Какао-бобы	4	2	60
Масло	4	1	40
Сахар	2	1	60
Стоимость 1 кг, ден. ед.	100	45	

Проанализировав количество заявок на покупку пробной партии шоколада, было решено шоколада «Лакомка» не выпускать более 25 кг.

1. Определить, в каком объеме (кг) следует выпустить шоколад каждого вида, чтобы доход от его реализации был максимальным.

2. Провести анализ устойчивости производственной деятельности предприятия к изменению цен изготавливаемой продукции и запасов ресурсов.

5.1. Нахождение оптимального плана производства

Построим математическую модель задачи. Для этого определим переменные задачи, целевую функцию и ограничения, которым удовлетворяют переменные. Обозначим через x_1 и x_2 количество (кг) шоколада каждого вида, планируемое к производству и последующей продаже. Тогда математическая модель задачи будет иметь вид

$$f(x) = 100x_1 + 45x_2 \to \max,$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 60,$$
$$4x_1 + x_2 \le 40,$$
$$2x_1 + x_2 \le 60,$$
$$x_2 \le 25,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решим задачу графически, для этого построим множество допустимых планов. Рассмотрим первое неравенство. Оно задает некоторую полуплоскость, расположенную по одну сторону от прямой:

$$p_1: \qquad 4x_1 + 2x_2 = 60.$$

Построим эту прямую на плоскости с координатными осями x_1 и x_2. Для проведения прямой достаточно знать две ее точки. Проще всего найти точки пересечения прямой с осями координат. Полагая $x_1 = 0$, из уравнения прямой получим $x_2 = 30$, а при $x_2 = 0$ найдем $x_1 = 15$. Таким образом, прямая p_1 пройдет через точки (0, 30) и (15, 0). Чтобы определить, по какую сторону от прямой расположена полуплоскость, достаточно подставить в неравенство $4x_1 + 2x_2 \le 60$ координаты любой точки плоскости, не принадлежащие данной прямой. Если прямая не проходит через начало координат, то удобнее всего взять точку (0, 0). Очевидно, что в этой точке неравенство строго выполняется ($4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 60$), значит, полуплоскость, определяемая неравенством, содержит рассматриваемую точку, располагается *ниже* p_1. Искомую полуплоскость отметим стрелкой.

Построим полуплоскости, задаваемые неравенствами $4x_1 + x_2 \le 40$, $2x_1 + x_2 \le 60$, $x_2 \le 25$. Для этого нанесем на координатную плоскость граничные прямые:

(p_2) $4x_1 + x_2 = 40$ проходит через точки (0, 40), (10, 0);

(p_3) $2x_1 + x_2 = 60$ проходит через точки (0, 60), (30, 0);

(p_4) $x_2 = 25$ проходит через точку (0, 25), параллельно оси x_1.

Подставляя координаты точки (0, 0) в неравенство $4x_1 + x_2 \le 40$, видим, что начало координат также лежит в искомой полуплоскости, значит, все точки, удовлетворяющие неравенству, расположены ниже прямой p_2. Аналогично строится третья и четвертая полуплоскость.

Наконец, условия неотрицательности: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ задают все точки первой четверти.

Выделяя теперь точки плоскости, удовлетворяющие всем ограничениям задачи, то есть расположенные одновременно во всех полуплоскостях, получаем множество допустимых планов X.

Построим линии уровня целевой функции $f(x) = 100x_1 + 45x_2$. Множество линий уровня задается уравнениями $100x_1 + 45x_2 = h$, в них h – параметр, может принимать любые действительные значения. Уравнения задают семейство параллельных прямых, зависящих от параметра h. Все прямые перпендикулярны целевому вектору $c = (100, 45)$, составленному из коэффициентов целевой функции. Напомним, что целевой вектор совпадает с градиентом линейной целевой функции. Градиент линейной функции постоянен, в любой точке координатной плоскости задает направление, в котором функция возрастает быстрее всего и является перпендикулярным линии уровня функции, проходящей через эту точку. Поэтому для построения семейства линий уровня целевой функции достаточно построить ее целевой вектор, и провести несколько прямых, перпендикулярных этому вектору. Линии уровня будем проводить так, чтобы они пересекали множестве планов X, помня при этом, что при параллельном перемещении прямых в направлении целевого вектора $c = (100, 45)$

значение функции $f(x) = 100x_1 + 45x_2$ будет возрастать. Поскольку в задаче оптимальный план должен доставлять целевой функции максимально возможное значение, то для решения задачи графически надо среди всех точек $x = (x_1,\ x_2)$ множества планов X найти такую точку $x^* = (x_1^*,\ x_2^*)$, через которую пройдет последняя линия уровня в направлении целевого вектора $c = (100, 45)$.

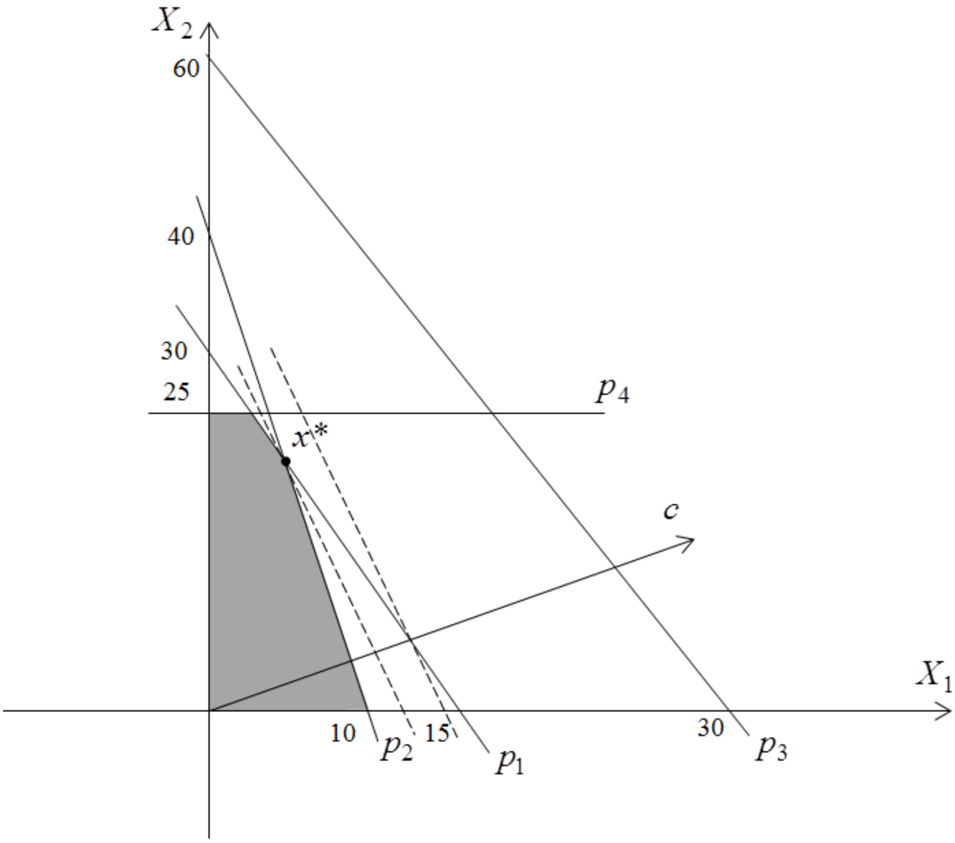


Рис. 1. Нахождение оптимального плана

Из рис. 1 видно, что искомой будет точка пересечения прямых p_1 и p_2. Решая совместно систему уравнений, задающих прямые p_1 и p_2:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 60, \\ 4x_1 + x_2 = 40, \end{cases}$$

находим оптимальный план задачи $x^* = (5,\ 20)$. При этом максимальное значение целевой функции будет равно $f(x^*) = 1400$. Это означает, что для получения максимального дохода в 1400 ден. ед. фабрика должна производить и реализовывать 5 кг шоколада «Восхищение» и 20 кг шоколада «Лакомка».

5.2. Анализ устойчивости производственной деятельности предприятия

5.2.1. Двойственная задача. Двойственные оценки (теневые цены) ресурсов

Для полноты проводимого далее анализа нам крайне полезной будет информация, которую можно получить из решения двойственной по отношению к исходной задачи. Обозначим через y_1, y_2, y_3, y_4 двойственные оценки (теневые цены) ресурсов. В данном случае спрос на шоколад «Лакомка» мы предлагаем рассматривать формально как производственный ресурс. Тогда двойственная задача формулируется следующим образом: необходимо определить двойственные оценки каждого вида ресурсов таким образом, чтобы их суммарная стоимость была минимальна, при этом стоимость расхода ресурсов на одну единицу продукции была не меньше цены ее реализации.

Запишем математическую модель двойственной задачи:

$$
\begin{gathered}
g(y) = 60y_1 + 40y_2 + 60y_3 + 25y_4 \to \min, \\
4y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 100, \\
2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 45, \\
y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0,\ \ y_4 \geq 0.
\end{gathered}
$$

Решение двойственной задачи определяет набор оценок ресурсов, применяемых для изготовления шоколада.

Используя решение прямой задачи, получим решение двойственной задачи из условий равновесия:

$$
\begin{cases}
(4y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 100)x_1 = 0, \\
(2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 45)x_2 = 0, \\
(4x_1 + 2x_2 - 60)y_1 = 0, \\
(4x_1 + x_2 - 40)y_2 = 0, \\
(2x_1 + x_2 - 60)y_3 = 0, \\
(x_2 - 25)y_4 = 0, \\
y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ y_3 \geq 0,\ \ y_4 \geq 0.
\end{cases}
$$

Подставляя в каждое условие $x^* = (5,\ 20)$, получаем систему:

$$
\begin{cases}
4y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 100 = 0, \\
2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 45 = 0, \\
y_1 \geq 0, \\
y_2 \geq 0, \\
y_3 = 0, \\
y_4 = 0.
\end{cases}
$$

Отсюда вытекает, что $y_1^* = 20,\ y_2^* = 5,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0.$ Двойственные оценки больше нуля у тех видов ресурсов, которые используются полностью для изготовления шоколада, такие ресурсы называют дефицитными для оптимального плана. Оценки дефицитных ресурсов показывают, насколько возрастет максимальное значение дохода при увеличении запасов соответствующего ресурса на единицу (если при этом решение двойственной задачи не изменится). Ценность различных видов ресурсов нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым осуществляется их закупка. В данном случае речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность ресурса относительно увеличения дохода только для полученного оптимального плана. Нулевые двойственные оценки свидетельствуют о недефицитности соответствующего ресурса также для оптимального плана.

Перейдем к последовательному анализу влияния факторов на оптимальный план и максимальный доход от продажи шоколада. В частности, проанализируем влияние на решение задачи изменений цен каждого из видов шоколада и запасов каждого из видов ресурсов и спроса на шоколад «Лакомка» в отдельности.

5.2.2. Анализ устойчивости производственной деятельности предприятия к изменению цен продукции

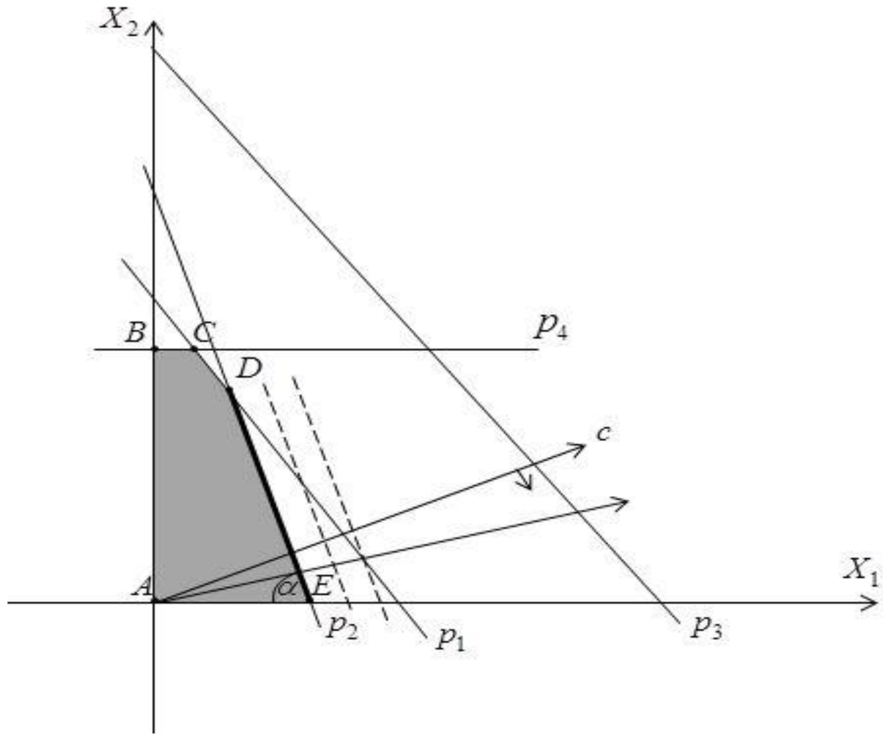
Рассмотрим, в каких пределах возможно изменение цены одного килограмма каждого вида шоколада в отдельности, при котором решение (оптимальный план) задачи сохранится. Цены на «Восхищение» и «Лакомку» определяют угол наклона α линий уровня целевой функции

$$f(x) = 100x_1 + 45x_2 : \ tg\alpha = -\frac{100}{45} = -\frac{20}{9}.$$

Уменьшение стоимости шоколада «Восхищение» или увеличение стоимости шоколада «Лакомка» приводит к вращению линии уровня целевой функции по часовой стрелке относительно точки D (рис. 2, а). Однако до тех пор, пока линии уровня функции не совпадут с прямой p_2, единственным оптимальным планом в задаче будет оставаться $x^* = (5,\ 20)$. При совпадении линии уровня с прямой p_2 задача будет иметь бесконечное множество решений, таковыми будут все точки, принадлежащие отрезку DE, причем одна из оптимальных точек будет соответствовать найденному плану $x^* = (5,\ 20)$. Доход от продажи шоколада в рассматриваемой ситуации изменится. Дальнейшее уменьшение стоимости шоколада «Восхищение» или увеличение стоимости шоколада «Лакомка» приведет к тому, что план $x^* = (5,\ 20)$ перестанет быть оптимальным.

Увеличение стоимости шоколада «Восхищение» или уменьшение стоимости шоколада «Лакомка» приводит к вращению линий уровня против часовой стрелки (рис. 2, б). До тех пор, пока линии уровня функции не совпадут с прямой p_1, единственным оптимальным планом в задаче будет оставаться $x^* = (5,\ 20)$. При совпадении линии уровня с прямой p_1 задача будет иметь бесконечное множество решений, таковыми будут все точки, принадлежащие отрезку CD, причем одна из оптимальных точек будет соответствовать найденному плану $x^* = (5,\ 20)$. Доход от продажи шоколада в рассматриваемой ситуации изменится. Дальнейшее уменьшение стоимости шоколада «Восхищение» или увеличение стоимости шоколада «Лакомка» приведет к тому, что план $x^* = (5,\ 20)$ перестанет быть оптимальным.

а)



б)

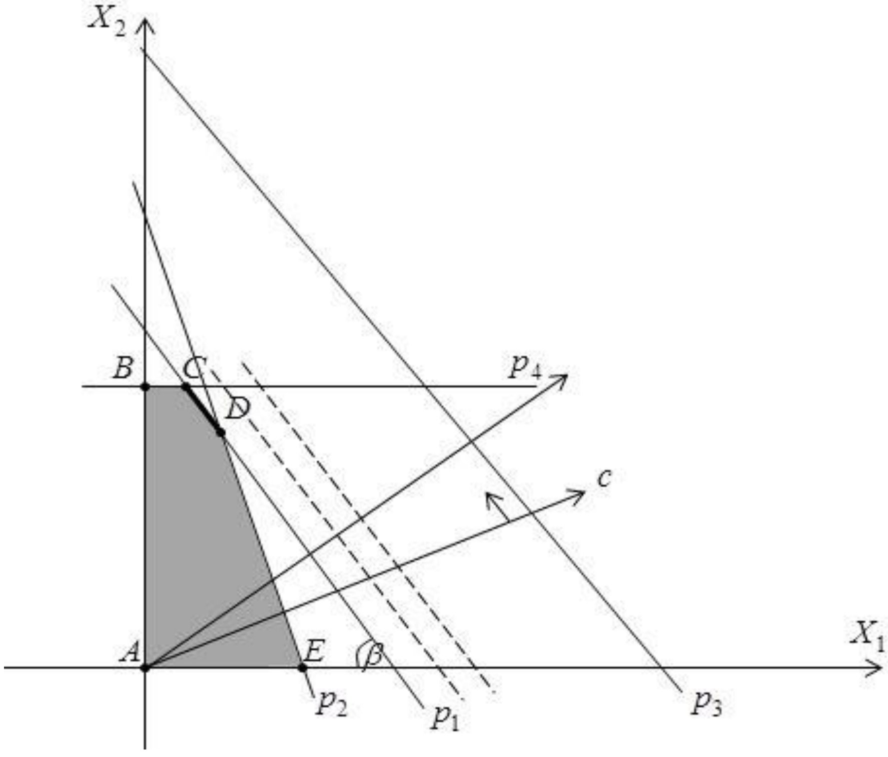


Рис. 2. Анализ изменения стоимости продукции

Определим множество значений цены c_1 за килограмм шоколада «Восхищение», при котором план $x^* = (5,\ 20)$ будет оптимальным, если цена на шоколад «Лакомка» не изменяется, составляет 45 ден. ед.

При совпадении линия уровня целевой функции с прямой p_2 угол наклона линии уровня $c_1x_1 + 45x_2 = h$ совпадет с углом наклона прямой $4x_1 + x_2 = 40$. То есть

$$tg\alpha = -\frac{c_1}{45} = -\frac{4}{1}.$$

Следовательно, максимальная цена c_1 за килограмм шоколада «Восхищение» может быть $c_1 = \frac{45 \cdot 4}{1} = 180$ ден. ед. при неизменном $c_2 = 45$ ден. ед., тогда план $x^* = (5,\ 20)$ задачи будет оставаться оптимальным, доход от реализации увеличится и составит $\overline{f}(x^*) = 180 \cdot 5 + 45 \cdot 20 = 1800$ ден. ед.

При совпадении линия уровня целевой функции с прямой p_1 углы наклона линии уровня $c_1x_1 + 45x_2 = h$ и прямой $4x_1 + 2x_2 = 60$ совпадают:

$$tg\beta = -\frac{c_1}{45} = -\frac{4}{2}.$$

Минимальная стоимость шоколада «Восхищение», при которой план $x^* = (5,\ 20)$ задачи будет оставаться оптимальным $c_1 = \frac{45 \cdot 4}{2} = 90$ ден. ед. При этом доход от реализации уменьшится и станет равным $\overline{f}(x^*) = 90 \cdot 5 + 45 \cdot 20 = 1350$ ден. ед. Таким образом, если $c_2 = 45$ ден. ед., то множество значений цены шоколада «Восхищение», при которых точка $x^* = (5,\ 20)$ останется оптимальной, определяется неравенством $90 \le c_1 \le 180$. При цене $c_1 = 90$ оптимальное решение представляет собой множество точек лежащих на отрезке, соединяющем точки CD. Если же цена станет меньше 90 ден. ед., то план $x^* = (5,\ 20)$ перестанет быть оптимальным и решение сместится в точку C. Аналогично, при $c_1 = 180$ максимальный доход достигается в любой точке отрезка DE, а при увеличении цены больше 180 ден. ед. шоколад «Лакомка» станет невыгодно.

Аналогичные вычисления можно сделать и для цены шоколада «Лакомка» c_2 при фиксированной цене шоколада «Восхищение»:

$$tg\alpha = -\frac{100}{c_2} = -\frac{4}{1}, \text{ отсюда следует } c_2 = \frac{100 \cdot 1}{4} = 25,$$

$$\overline{f}(x^*) = 100 \cdot 5 + 25 \cdot 20 = 1000 \text{ ден. ед.};$$

$$tg\beta = -\frac{100}{c_2} = -\frac{4}{2}, \text{ отсюда следует } c_2 = \frac{100 \cdot 2}{4} = 50,$$

$$\overline{f}(x^*) = 100 \cdot 5 + 50 \cdot 20 = 1500 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, если цена шоколада «Восхищение» $c_1 = 90$ ден. ед., а цена шоколада «Лакомка» составит $25 \le c_2 \le 50$, план $x^* = (5,\ 20)$ задачи будет оставаться оптимальным. Если цена за один килограмм шоколада «Лакомка» станет меньше 25 ден. ед., то оптимальный план сместится в точку E, а это означает, что изготовление этой сладости становится невыгодным. Если же цена шоколада «Лакомка» станет больше 50 ден. ед., то оптимальной точкой будет C.

5.2.3. Анализ устойчивости производственной деятельности предприятия к изменению запасов ресурсов

В построенной модели первые три неравенства характеризуют ограничения на ресурсы. В таких неравенствах правая часть равна запасам ресурсов. Четвертое неравенство связано с ограничениями на спрос на шоколад «Лакомка», его «запас» равен максимальному спросу на данный шоколад. Изучим чувствительность оптимального решения к изменению запасов ресурсов.

По отношению к оптимальному плану ограничения линейной модели разбиваются на две группы: связывающие (связные, активные) и несвязывающие (несвязные, неактивные, пассивные). Напомним, что ограничения называются связывающими (связными, активными) на рассматриваемом плане, если они выполняются на нем как равенства, иначе они называются и несвязывающими (несвязными, неактивными, пассивными). Ресурсы, соответствующие связывающим ограничениям для оптимального плана, являются для него дефицитными. Ресурсы, соответствующие несвязывающим ограничениям, – недефицитными. В рассматриваемой задаче на оптимальном плане какао-бобы и масло выступают дефицитными ресурсами, а сахар и спрос на шоколад «Лакомка» – недефицитным (рис. 3).

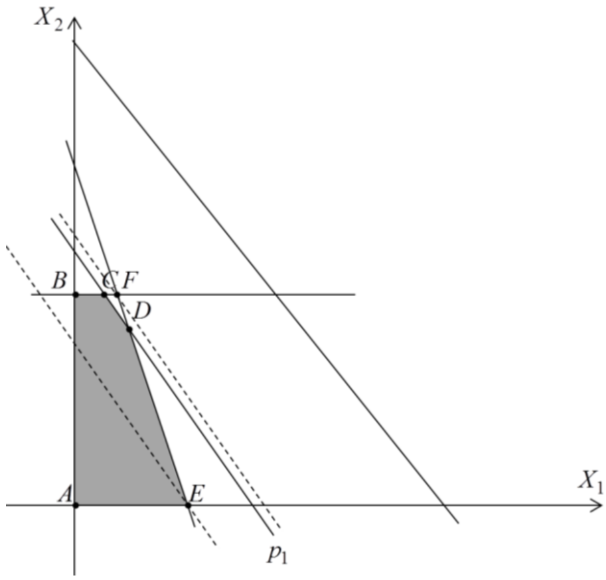


Рис. 3. Изменение запаса какао-бобов

Предположим, что для фабрики кроме максимизации дохода важной является задача сохранения ассортимента выпускаемой продукции, и при этом в рассматриваемом периоде возможно изменение количества запасов ресурсов.

Поставим перед собой цель найти предельные значения приращений или изменений (допустимое увеличение и уменьшение) запасов каждого из ресурсов в отдельности, при которых неизменными останутся ассортимент выпускаемой продукции в оптимальном плане и теневые цены ресурсов. Напомним, что теневые цены (оптимальные значения двойственных переменных) показывают, как изменится целевая функция при изменении соответствующего запаса ресурса на единицу.

Из рис. 3 видно, что при увеличении количества какао-бобов прямая p_1 перемещается вверх параллельно самой себе, при этом треугольник CDF постепенно стягивается в точку F. В этом случае множество допустимых точек в задаче будет представлять собой выпуклый многоугольник $ABFE$, а оптимальной станет точка F, координаты которой определяются из системы

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 40 \\ \quad x_2 = 25 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^F = (x_1^F, x_2^F) = (3{,}75;\ 25).$$

При дальнейшем увеличении количества какао-бобов первое ограничение становится неактивным для любого допустимого плана производства, дальнейшее увеличение количества какао-бобов уже не изменит ни область допустимых значений, ни оптимальные план задачи. Ресурс перестанет быть дефицитным. Его теневая цена станет равной нулю.

Подставим координаты точки F в левую часть первого ограничения, определим максимальное количество какао-бобов, при котором ассортимент выпускаемого шоколада сохранится, и ресурс при этом будет оставаться на оптимальном плане дефицитным:

$$4x_1^F + 2x_2^F = 4 \cdot 3{,}75 + 2 \cdot 25 = 65\ \text{ед.}$$

Таким образом, для увеличения дохода за счет изменения запаса дефицитного ресурса какао-бобов разумно увеличить количество какао-бобов на 5 ед., при этом значение целевой функции будет равно

$$f(x^F) = 100 \cdot 3{,}75 + 45 \cdot 25 = 1500\ \text{ден. ед.}$$

При уменьшении запаса какао-бобов прямая p_1 будет перемещаться вниз параллельно самой себе, оптимальный план будет находиться в точке пересечения прямых p_1 и p_2 вплоть до совмещения этой точки с точкой E.

До тех пор, пока точка пересечения прямых p_1 и p_2 не окажется на оси OX_1, ассортимент выпускаемой продукции на оптимальном плане сохранится. В точке E, где точка пересечения перенесенной прямой p_1 и прямой p_2 достигает оси OX_1, план производства $x^E = (x_1^E, x_2^E) = (10,\ 0)$, таким образом произошло изменение ассортимента выпускаемой продукции. Для производства

$x^E = (10,\ 0)$ понадобится $4x_1^E + 2x_2^E = 4 \cdot 10 + 2 \cdot 0 = 40$ ед. какао-бобов. Значение целевой функции (доход) уменьшиться до

$$f(x^E) = 100 \cdot 10 + 45 \cdot 0 = 1000 \text{ ден. ед.}$$

Аналогично решается задача об изменении запасов масла, а дефицитного на оптимальном плане (рис. 4).

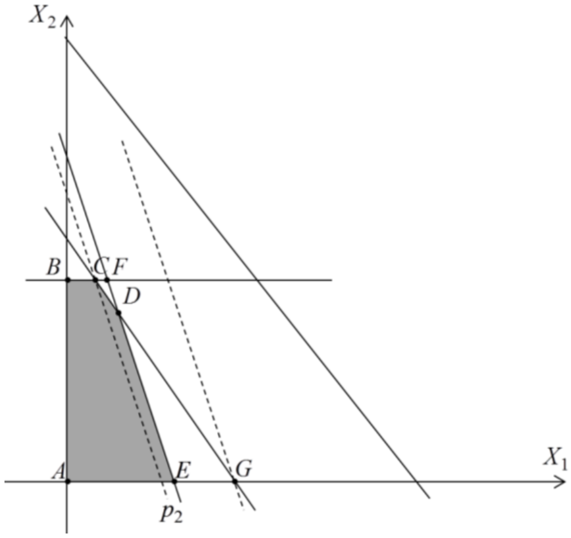


Рис. 4. Изменение запаса масла

Увеличение запаса масла, при котором неизменными останутся ассортимент выпускаемой в оптимальном плане продукции и теневые цены ресурсов, возможно до тех пор, пока прямая p_2 не пересечет точку G с координатами $x^G = (x_1^G, x_2^G) = (15, 0)$.

Запас масла при этом составит $4x_1^G + x_2^G = 4 \cdot 15 + 1 \cdot 0 = 60$ ед., прибыль возрастет до $f(x^G) = 100 \cdot 15 + 45 \cdot 0 = 1500$ ден. ед.

Уменьшение запасов возможно до тех пор, пока прямая p_2 не пересечет точку C. В плане производства, соответствующем точке C, сохраняется ассортимент выпускаемой продукции. Однако из рис. 4 видно, что в точке C пересекаются три ограничивающие допустимое множество прямые, кроме какао-бобов и масла, дефицитным становится спрос на шоколад «Лакомка», теневые цены ресурсов изменяются. Координаты точки C находим из решения системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 60, \\ x_2 = 25, \\ 4x_1 + x_2 = b_2^C \end{cases} \Rightarrow \quad x^C = (x_1^C, x_2^C) = (2{,}5;\ 25),\ b_2^C = 35.$$

Здесь b_2^C ед. – запас масла, при котором прямая p_2 пройдет через точку C. При этом прибыль от реализации шоколада уменьшится до $f(x^C) = 100 \cdot 2{,}5 + 45 \cdot 25 = 1375$ ден. ед.

Рассмотрим теперь изменения недефицитных ресурсов (рис. 5).

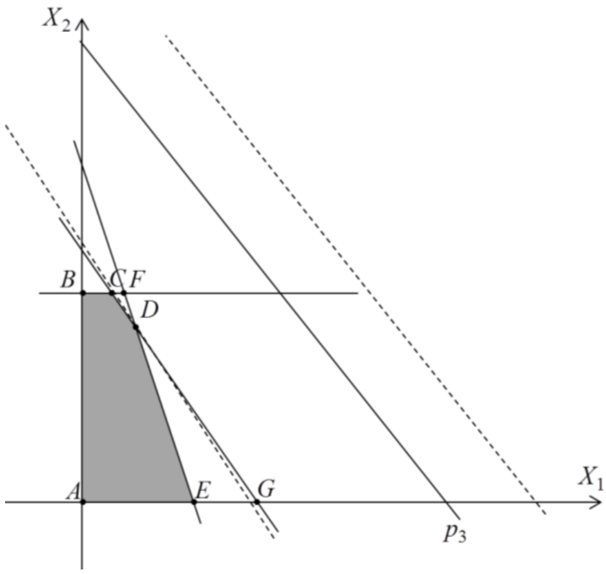


Рис. 5. Изменение запаса сахара

Сахар является недефицитным ресурсом. Естественно (видно из рис. 5), что любое движение вверх прямой p_3, сопровождающееся увеличением запасов недефицитного ресурса, не меняет оптимальное решение задачи. Движение же прямой вниз в условиях поставленной выше задачи возможно только до точки D с координатами $x^D = (x_1^D, x_2^D) = (5, 20)$, поскольку в этом случае сахар становится дефицитным ресурсом наряду с остающимися дефицитными какао-бобами и маслом, теневые цены ресурсов в этом случае становятся другими, допустимое множество и оптимальный план не изменяются. Таким образом, уменьшение сахара до

$$2x_1^D + x_2^D = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 = 30 \text{ ед.}$$

не меняет множество допустимых точек, а, как следствие, сохраняет оптимальное решение задачи и максимальную прибыль, но при этом изменяются теневые цены ресурсов (решения двойственной задачи).

Перейдем теперь к вопросу изменения правой части четвертого ограничения задачи, которое отвечает за спрос на шоколад «Лакомка». Ограничение является неактивным на оптимальном плане, формальный «ресурс» – спрос на шоколад «Лакомка» – является недефицитным (рис. 6).

Очевидно, что при увеличении спроса на шоколад «Лакомка» прямая p_4 сдвигается вверх, это приводит к увеличению допустимого множества, но решение задачи – оптимальный план производства – при этом не изменяется. Движение вниз параллельно самой себе можно осуществлять только до точки D, ресурс становится дефицитным, меняются теневые цены ресурсов. Таким образом, при уменьшении спроса на шоколад «Лакомка» до величины $x_2 = 20$, т.е. на 25 – 20 = 5, оптимальность полученного оптимальный план сохраняется.

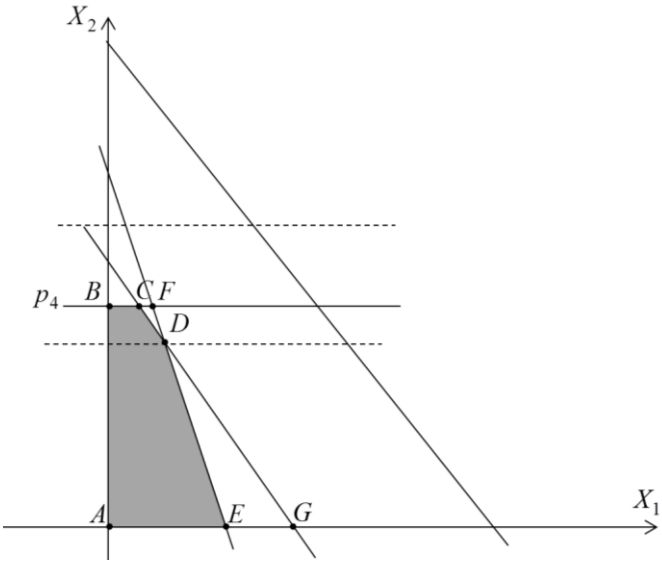


Рис. 6. Изменение спроса на шоколад «Лакомка»

Полученные результаты можно обобщить и представить в табл. 2.

Таблица 2

Ресурс	Предельные значения приращений ресурсов ($\overline{\varepsilon_i} < \varepsilon_i < \overline{\overline{\varepsilon_i}}$)	Изменения оптимального дохода, соответствующие предельным значениям приращений ресурсов ($\overline{f_i} < f_i(\overline{x}) < \overline{\overline{f_i}}$)
Какао-бобы	$40-60 < \varepsilon_1 < 65-60$	$1000-1400 < f_1(\overline{x}) < 1500-1400$
Масло	$35-40 < \varepsilon_2 < 60-40$	$1375-1400 < f_2(\overline{x}) < 1500-1400$
Сахар	$\varepsilon_3 \geq 30-60$	0
Спрос	$\varepsilon_4 \geq 20-25$	0

При анализе модели на устойчивость в условиях возможностей по дополнительным привлечениям ресурсов или инвестиций, что характерно для большинства экономических задач, возникает задача выбора предпочтения ресурсов для вложения дополнительных средств. Показатель ценности y_i дополнительной единицы ресурса *i*-го вида можно найти по формуле

$$y_i = \overline{f_i} \big/ \overline{\varepsilon_i} \qquad \text{или} \qquad y_i = \overline{\overline{f_i}} \big/ \overline{\overline{\varepsilon_i}} .$$

Используя данные таблицы, вычислим ценность какао-бобов:

$$y_1 = \frac{-400}{-20} = \frac{100}{5} = 20 \text{ ден. ед.}$$

Аналогично можно определить ценность масла:

$$y_2 = \frac{-25}{-5} = \frac{100}{20} = 5 \text{ ден. ед.}$$

Нетрудно заметить, что показатели ценности какао-бобов и масла совпадают с двойственными оценками (теневыми ценами этих ресурсов), полученными в 5.2.1.

На основе полученных данных можно сделать вывод, что дополнительные вложения (инвестиции) следует направить, прежде всего, на увеличение запаса какао-бобов, так ценность этого ресурса больше, чем масла. Привлечение дополнительной единицы этого ресурса увеличит суммарный доход на величину его ценности.

Сахар является недефицитным ресурсом, поэтому любое увеличение этого ресурса не меняет не только оптимальное решение задачи, но оптимальный доход.

В качестве дополнительного исследования ресурсов, используемых в задаче, проведем для них расчет двойственных оценок (теневых цен) для различных значений их запасов. Другими словами, исследуем зависимость максимального дохода от изменения запас одного ресурса при фиксированном запасе всех остальных. Проведем анализ на примере изменения количества какао-бобов при сохранении запасов масла и сахара и спроса на шоколад «Лакомка» (рис. 7).

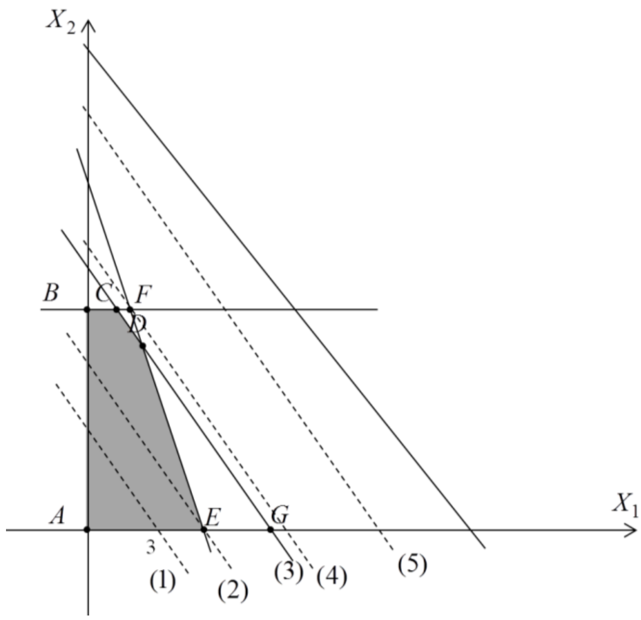


Рис. 7. Изменение количества какао-бобов при сохранении запасов масла и сахара и спроса на шоколад «Лакомка»

Пунктирные линии, рассмотренные в порядке (1), (2), (3), (4), (5), отражают динамику роста потребления какао-бобов для фабрики. Линия (3) отражает количество сырья, которое используется реально в условиях задачи для изготовления шоколада.

Проанализируем каждое из представленных на рис. 7 положений прямой, соответствующей первому ограничению в задаче. При запасе какао-бобов, представленном прямой (1), множество допустимых точек будет представлять собой треугольник, образованный этой прямой и осями координат. Запас ресурса, соответствующий этому положению прямой, равен 12 ед., тогда оптимальным решением в задаче будет точка $x^* = (3, 0)$. Решение двойственной задачи найдем, используя условия равновесия:

$$\begin{cases} (4y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 100)x_1 = 0, \\ (2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 45)x_2 = 0, \\ (4x_1 + 2x_2 - 12)y_1 = 0, \\ (4x_1 + x_2 - 40)y_2 = 0, \\ (2x_1 + x_2 - 60)y_3 = 0, \\ (x_2 - 25)y_4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 100 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 45 \ge 0, \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 = 0, \\ y_3 = 0, \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

Решение системы имеет вид $y_1^* = 25,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0.$

Это означает, что ценность одной единицы какао-бобов составляет 25 ден. ед. Если прямая p_1 будет пересекать ось OX_1 в пределах интервала $(A;E)$, ситуация будет аналогичной: единственным дефицитным ресурсом останутся какао-бобы, система для определения теневых цен ресурсов не изменится. Теневая цена (предельная эффективность какао-бобов) будет сохраняться равной 25 ден. ед.

Если прямая p_1 займет положение (2), оптимальный план $x^* = (10, 0)$ будет находиться в точке E, запас какао-бобов составит $b_1^E = 4 \cdot 10 + 2 \cdot 0 = 40$ ед., доход увеличится и составит $f(E) = 100 \cdot 10 + 45 \cdot 0 = 1000$ ден. ед. В точке E дефицитным будет не только сырье – какао-бобы, но и масло. Система для определения теневых цен ресурсов изменится:

$$\begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 100 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 45 \ge 0, \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 = 0, \\ y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 25, \\ 2y_1 + y_2 - 45 \ge 0, \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 = 0, \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

Она имеет бесконечное множество решений $y^* = \left(y_1^*,\ 25 - y_1^*, 0, 0\right)$, где $20 \le y_1^* \le 25$. Теневая цена какао-бобов в точке E определяется неоднозначно.

При запасах какао-бобов от 40 до 65 ед. $\left(40 < b_1 < 65\right)$ оптимальному плану будет соответствовать точка на интервале $\left(E; F\right)$: $x_1^* \ne 0$, $x_2^* \ne 0$, активными на оптимальных планах будут оставаться ограничения на какао-бобы и масло.

Для определения теневых цен ресурсов вновь воспользуемся условиями равновесия, из которых получим систему

$$\begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 100 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 45 = 0, \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 = 0, \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $y_1^* = 20,\ y_2^* = 5,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0.$ Теневая цена какао-бобов равна 20 ден. ед., т.е. каждая дополнительная единица сырья в диапазоне от 40 до 65 ед. будет давать увеличение дохода в размере 20 ден. ед. Такая ситуация будет сохраняться до тех пор, пока прямая, соответствующая этому ресурсу, будет продолжать движение до положения (4).

Когда прямая займет положение (4), оптимальное решение задачи переместится в точку $F = (3{,}75;\ 25)$, доход увеличится до

$$f(F) = 100 \cdot 3{,}75 + 45 \cdot 25 = 1500 \text{ ден. ед.}$$

В точке $x_1^* \ne 0$, $x_2^* \ne 0$ активными на оптимальном плане являются ограничения на какао-бобы, масло и спрос на шоколад «Лакомка». Для определения теневых цен ресурсов из условий равновесия мы получим систему

$$\begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 100 = 0, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 45 = 0, \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 = 0, \\ y_4 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 25 - y_1, \\ y_1 + y_4 = 20, \\ y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 = 0, \\ y_4 \ge 0. \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений, теневые цены всех дефицитных в точке F ресурсов определяются неоднозначно: $y^* = \left(y_1^*,\, 25 - y_1^*, 0, 20 - y_1^*\right)$, где $0 \le y_1^* \le 20$.

Когда количество какао-бобов превысит 65 ед. (эту ситуацию отражает положение прямой (5)), то сырье какао-бобы становится недефицитным и его предельная эффективность (теневая цена) оказывается нулевой.

На основе результатов выполненного анализа получим табличную запись функции предельной эффективности (двойственных оценок) какао-бобов и табличное преставление функции зависимости максимума дохода от увеличения его запасов (табл. 3, 4). Введем следующее обозначение для дополнительных единиц сырья $\Delta b_1 = \bar{b}_1 - b_1 = \bar{b}_1 - 40$, где $\bar{b}_1 \in (40;\ 65)$.

Таблица 3

Функция предельной эффективности какао-бобов

Ценность сырья y_i^*, ден. ед. / ед.	25	$20 \le y_i^* \le 25$	20	$0 \le y_i^* \le 20$	0
Какао-бобы, ед.	(0; 40)	40	(40; 65)	65	(65; ∞)

Таблица 4

Зависимость максимального дохода от количества какао-бобов

Максимальная прибыль $f(x^*)$, ден. ед.	$25b_1$	1000 + 20Δb_1	1500
Какао-бобы, ед.	(0; 40)	[40; 65)	[65; ∞)

Используя информацию табл. 3 и 4, построим графики этих функций (рис. 8, 9).

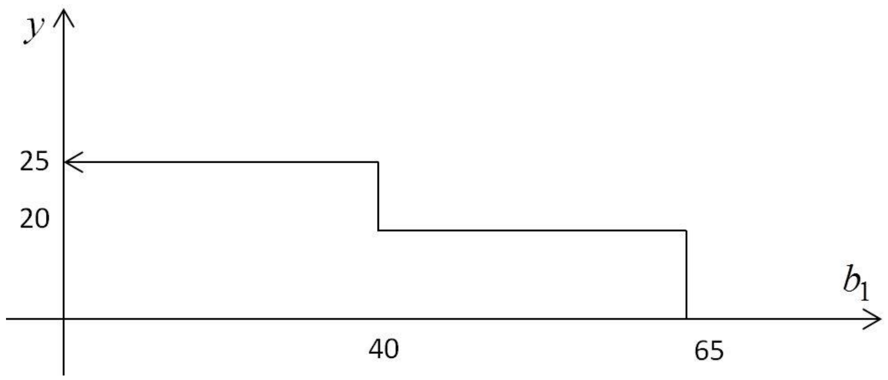


Рис. 8. График функции предельной эффективности какао-бобов

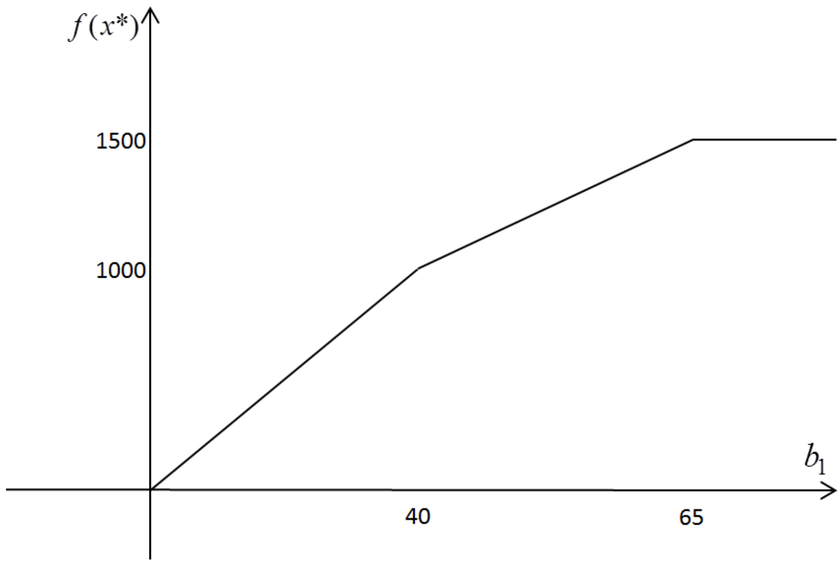


Рис. 9. График зависимости максимального дохода от количества какао-бобов

Вид первого графика отражает убывание эффективности ресурса с ростом объемов его потребления.

6. Общие принципы решения задач линейного программирования процессором *MS Excel*

В настоящее время все популярные версии табличных процессоров включают встроенные средства решения задач оптимизации. Не является исключением и пакет прикладных программ *MS Excel*, представляющий пользователю специальную надстройку **Поиск решения**. С ее помощью можно быстро определить оптимальный план производства продукции при ограниченных ресурсах, обеспечивающий максимизацию одних величин (например, прибыли) или минимизацию других (например, расходов). Надстройка **Поиск решения** позволяет анализировать задачи трех типов: линейные, нелинейные и целочисленные.

Принцип решения задач линейного программирования рассмотрим на примере 1. В результате моделирования расчета оптимального производства шоколада была получена следующая математическая модель задачи:

$$
\begin{gathered}
f(x) = 100x_1 + 45x_2 \to \max, \\
4x_1 + 2x_2 \le 60, \\
4x_1 + x_2 \le 40, \\
2x_1 + x_2 \le 60, \\
x_2 \le 25, \\
x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.
\end{gathered}
$$

6.1. Создание электронной модели

Создадим компьютерную модель в среде *MS Excel*. Для этого на лист, который назовем «Оптимальное производство», занесем все исходные данные, сформировав две таблицы, как показано на рис. 10.

	A	B	C	D	E	F
1	*Шоколад*	*Восхищение*	*Лакомка*	*Суммарный доход*		
2	*План производства*	1	1			
3	*Стоимость 1 кг шоколада*	100	45			
4						
5						
6	*Ресурсы*	*Расход ресурсов на один килограмм шоколада*		*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Какао-бобы*	4	2		60	
8	*Масло*	4	1		40	
9	*Сахар*	2	1		60	
10						
11						
12	*Максимальный спрос на шоколад "Лакомка"*	25				
13						
14						
15						

Рис. 10. Формирование исходных данных для компьютерной модели

В ячейки B2, C2 введем начальный план выпуска шоколада. Здесь он задан единицами, поскольку при решении задач от начальных значений переменных не зависит ни оптимальное решение, ни время его поиска. В ячейки B3, C3 запишем стоимость 1 кг шоколада «Восхищение» и 1 кг шоколада «Лакомка» соответственно. В ячейке D2 запишем формулу для вычисления значения целевой функции, а именно суммарного дохода от реализации шоколада «Восхищение» и шоколада «Лакомка». Воспользуемся функцией СУММПРОИЗВ. Для этого установим курсор в ячейку D2 и выберем в меню вкладку **Формулы,** а далее **Математические**. В появившемся окне выбираем искомую функцию СУММПРОИЗВ.

Для формирования суммарного дохода заполним поле Массив 1, выделив ячейки B2, C2 курсором, а для поля Массив 2, ячейки B3, C3, как показано на рис. 11.

После нажатия кнопки *OK* в ячейке D2 увидим суммарный доход от реализации начального плана выпуска шоколада, в нашем случае – 1 кг шоколада «Восхищение» и 1 кг шоколада «Лакомка».

Теперь аналогичным образом отразим во второй таблице в ячейках D7, D8, D9 суммарный расход ингредиентов для производства шоколада. Таким образом, получим следующие формулы:

– в ячейке D7 реализована функция СУММПРОИЗВ(B2:C2;B7:C7);
– в ячейке D8 реализована функция СУММПРОИЗВ(B2:C2;B8:C8);
– в ячейке D9 реализована функция СУММПРОИЗВ(B2:C2;B9:C9).

Отдельной строкой запишем максимальный спрос на шоколад «Лакомка» для того, чтобы отразить эту информацию при построении компьютерной (электронной) модели задачи (рис. 12).

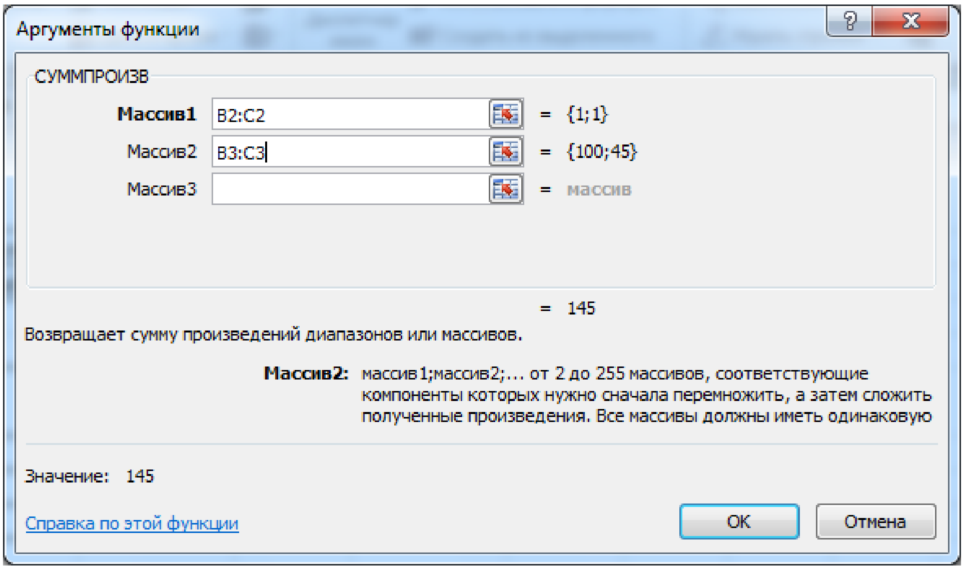


Рис. 11. Использование функции СУММПРОИЗВ
для вычисления суммарного дохода

	A	B	C	D	E	F
1	*Шоколад*	*Восхищение*	*Лакомка*	*Суммарный доход*		
2	*План производства*	1	1	145		
3	*Стоимость 1 кг шоколада*	100	45			
4						
5						
6	*Ресурсы*	*Расход ресурсов на один килограмм шоколада*		*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Какао-бобы*	4	2	6	60	
8	*Масло*	4	1	5	40	
9	*Сахар*	2	1	3	60	
10						
11						
12	*Максимальный спрос на шоколад "Лакомка"*	25				
13						

Рис. 12. Электронная модель задачи о производстве шоколада

6.2. Использование надстройки «Поиск решения»

Для поиска оптимального решения в меню выберем вкладку **Данные** и в этой вкладке активизируем надстройку **Поиск решения**, в результате на экране компьютера появится окно (рис. 13).

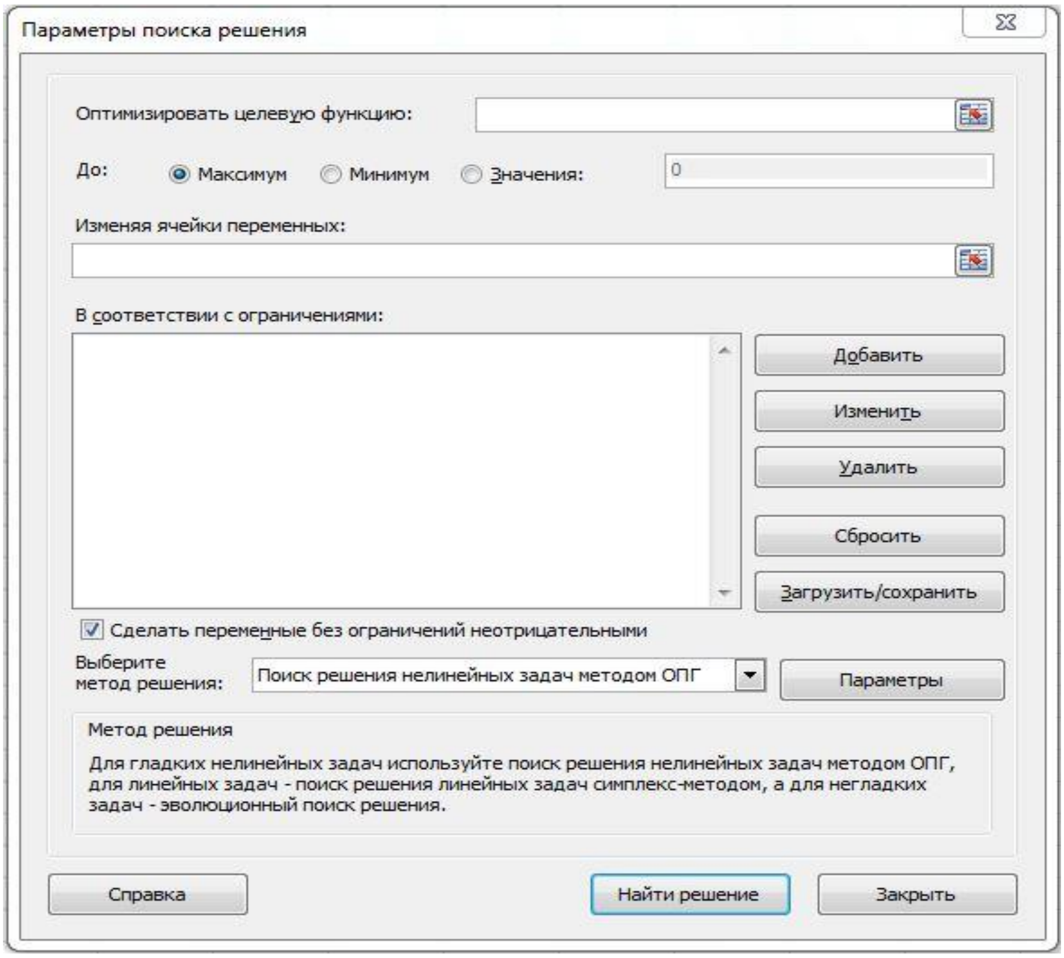


Рис. 13. Диалоговое окно **Поиск решения**

Рассмотрим поподробнее процесс создания компьютерной модели задачи.

В поле *Оптимизировать целевую функцию* должен находиться адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значения целевой функции, для рассматриваемой задачи это функция суммарного дохода, ячейка D2. Содержимое этой ячейки можно максимизировать, минимизировать или для нее можно поставить целью достижение какое-либо постоянного значения. В рамках рассматриваемой задачи на поиск максимального дохода, выделяем значение *Максимум*.

Активизировав поле *Изменяя ячейки переменных*, с помощью курсора вводим ячейки B2:C2, в которых находятся значения переменных задачи, количество выпускаемого шоколада. Значения этих ячеек будут изменяться в процессе поиска оптимального решения.

Следующим этапом необходимо задать для средства Поиск решения основные ограничения рассматриваемой задачи. Для этого активизируем поле *В* *соответствии с ограничениями*, нажав кнопку *Добавить*. Эта кнопка служит для отображения окна *Добавление ограничения* (рис. 14).

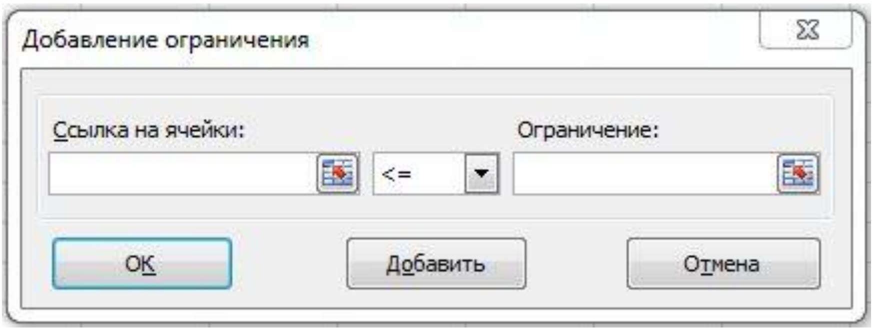


Рис. 14. Диалоговое окно *Добавление ограничения*

В поле *Ссылка на ячейки* следует ввести ячейку, в которой находится левая часть первого основного ограничения задачи, в нашем случае это ячейка D7 с формулой для вычисления расхода какао-бобов. В следующем поле выберем знак ограничения «≤». В поле *Ограничение* следует ввести ячейку E7 со значением правой части первого ограничения – запаса какао-бобов на фабрике. Далее, нажав на кнопку *Добавить*, аналогично можно записать ограничения, соответствующие маслу и сахару.

Можно поступить более рационально. Поскольку модель задачи организована так, что ресурсные ограничения одного знака расположены рядом, то их можно ввести все вместе, используя диапазоны ячеек: в поле *Ссылка на ячейки* вводятся ячейки D7: D9, в поле *Ограничение – ячейки* E7:E10 (рис. 15).

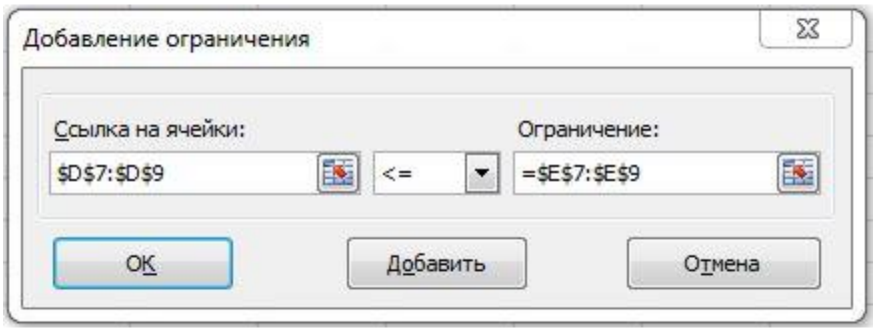


Рис. 15. Задание ограничений на ресурсы

Отдельно введем ограничение спроса на шоколад «Лакомка» (рис. 16).

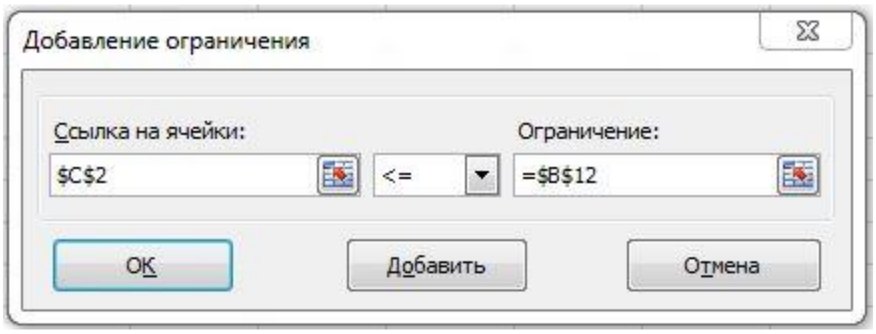


Рис. 16. Задание ограничения спроса на шоколад «Лакомка»

После введения всех основных ограничений следует нажать кнопку ОК, чтобы вернуться в диалоговое окно Поиска решений.

Активизируем условие *Сделать переменные без ограничений неотрицательными* и выберем метод решения задачи. Для решения линейных задач программа предлагает воспользоваться симплекс-методом. Для выбора этого метода нужно воспользоваться опцией висячего меню. В результате заполнения всех полей и внесения всех ограничений в диалоговое окно **Поиск решений** электронная модель задачи примет вид, представленный на рис. 17.

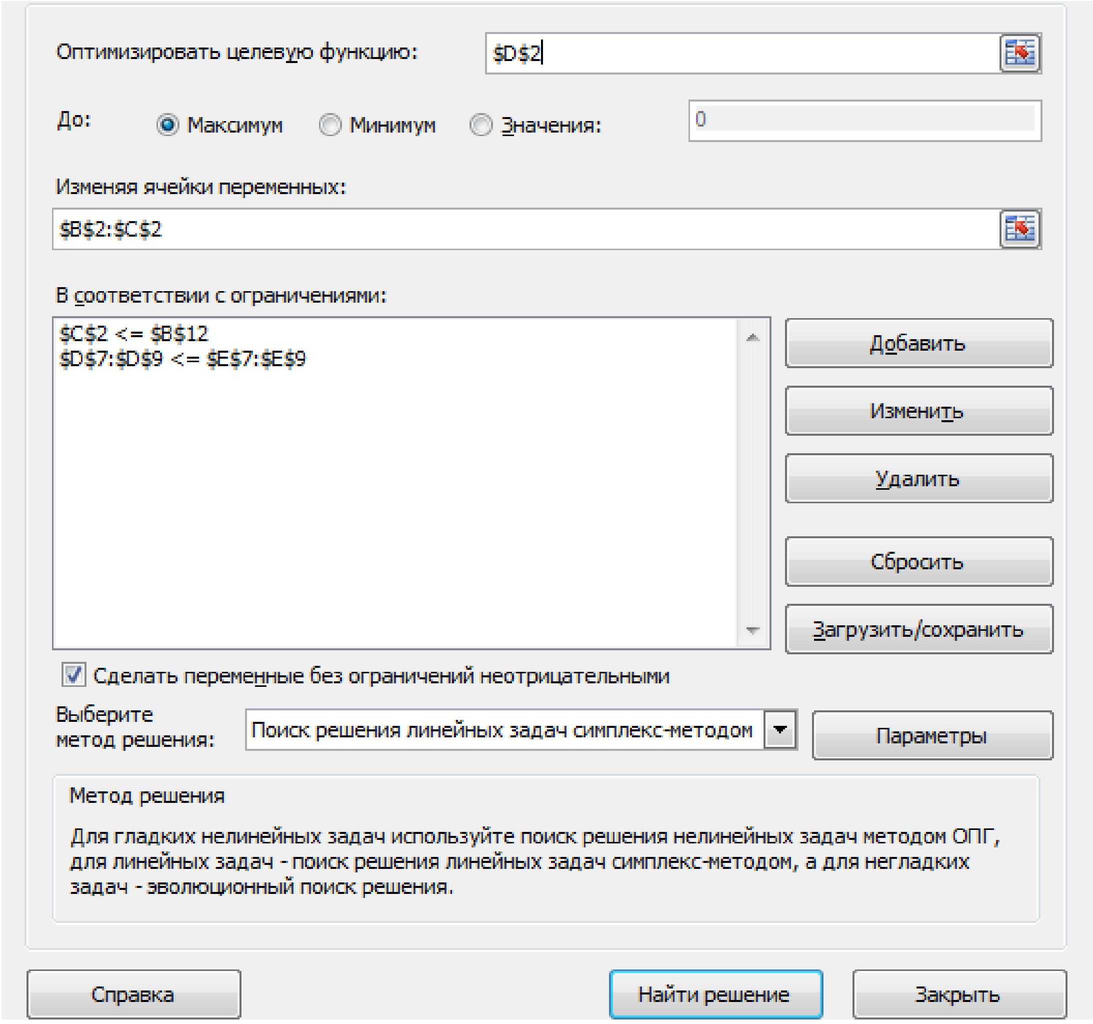


Рис. 17. Электронная модель задачи в надстройке **Поиск решения**

Нажмем клавишу ОК, чтобы вернуться в диалоговое окно надстройки **Поиск решения.**

Запустим вычислительный процесс поиска оптимального решения с помощью кнопки *Найти решение*. После нахождения оптимального производства шоколада на экране появится окно **Результаты поиска решения**, в котором предлагается выбрать тип отчета: результаты, устойчивость, пределы, а также элементы *Сохранить найденное решение* или *Восстановить исходные значения*. Выберем опцию *Сохранить найденное решение*, выделим мышкой все отчеты (рис. 18).

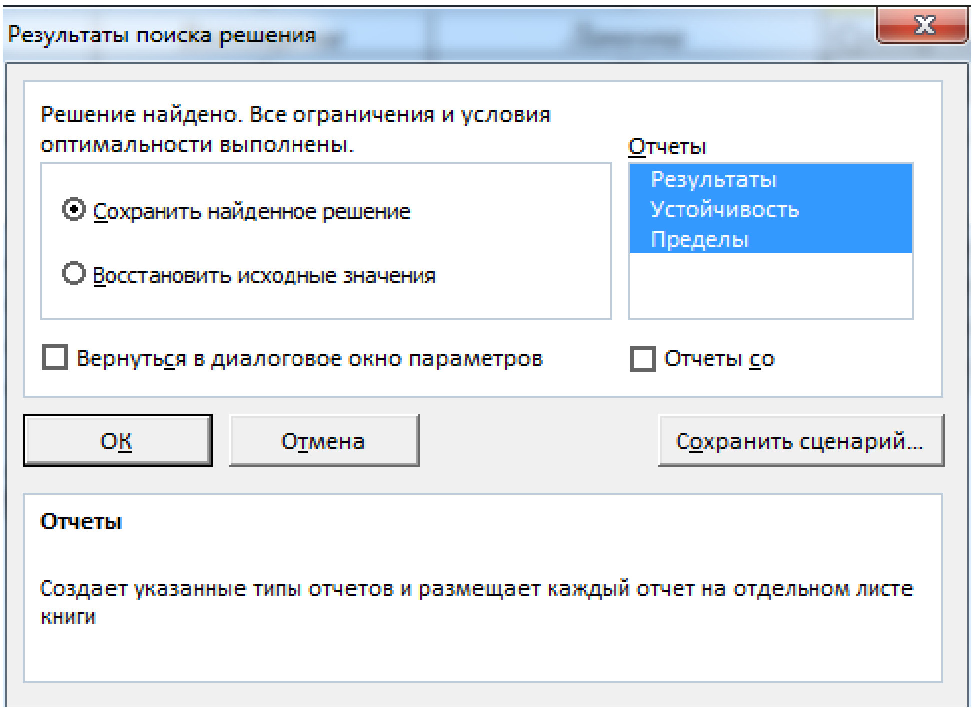


Рис. 18. Диалоговое окно **Результаты поиска решения**

После нажатия кнопки ОК в книге добавляется по листу на каждый из выбранных типов отчета: «Отчет о результатах», «Отчет об устойчивости» и «Отчет о пределах». Результаты поиска решения приведены на рис. 19.

	A	B	C	D	E	F
1	*Шоколад*	*Восхищение*	*Лакомка*	*Суммарный доход*		
2	*План производства*	5	20	1400		
3	*Стоимость 1 кг шоколада*	100	45			
4						
5						
6	*Ресурсы*	*Расход ресурсов на один килограмм шоколада*		*Суммарный расход*	*Запас*	
7	*Какао-бобы*	4	2	60	60	
8	*Масло*	4	1	40	40	
9	*Сахар*	2	1	30	60	
10						
11						
12	*Максимальный спрос на шоколад "Лакомка"*	25				
13						

Рис. 19. Результаты поиска решения в электронной модели задачи

В ячейках B2, C2 найдено оптимальное производство шоколада $x_1^* = 5$, $x_2^* = 20$, т.е. фабрике необходимо реализовать, с целью получения максимального дохода в размере 1400 ден. ед. (ячейка D2), 5 кг шоколада «Восхищения» и 20 кг шоколада «Лакомка». Также анализируя вторую таблицу, видим, что какао-бобы и масло являются дефицитными ресурсами, т.е. используются полностью на производство сладостей в количестве 60 и 40 ед. соответственно. Сахар же используется в количестве 30 ед., что составляет ровно половину от общего количества ингредиента, которое имеется в наличии. Следовательно, этот ресурс является недефицитным. Недефицитным является и ограничение спроса на шоколад «Лакомка».

6.3. Анализ решения

На основании сформированных отчетов проведем более полный анализ результатов расчетов компьютерной модели.

«**Отчет о результатах**» представлен на рис. 20.

Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$D$2	План производства Суммарный доход	145	1400

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$2	План производства Восхищение	1	5	Продолжить
$C$2	План производства Лакомка	1	20	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$D$7	Какао-бобы Суммарный расход	60	$D$7<=$E$7	Привязка	0
$D$8	Масло Суммарный расход	40	$D$8<=$E$8	Привязка	0
$D$9	Сахар Суммарный расход	30	$D$9<=$E$9	Без привязки	30
$C$2	План производства Лакомка	20	$C$2<=$B$12	Без привязки	5

Рис. 20. Отчет о результатах

Он состоит из трех таблиц:

1. Таблица «*Ячейка целевой функции*»: содержит исходное и окончательное значение целевой функции. В рамках представленной задачи окончательное значение представляет собой максимальную суммарный доход от реализации шоколада, что составляет 1400 ден. ед.

2. Таблица «*Ячейки переменных*»: содержит исходное, окончательное значение переменных и указание к вычислению целочисленного решения. В рамках рассматриваемой задачи оптимальное производство состоит из 5 кг шоколада «Восхищение» и 20 кг шоколада «Лакомка».

3. Таблица «*Ограничения*»: содержит результаты оптимального решения для ограничений задачи. Она состоит из значений левых частей основных ограничений задачи, зависимостей между ячейками, которые формируют эти ограничения, а также разницей между значениями правой и левой части ограничений. Эта разница записывается в таблице в столбце *Допуск* и, исходя из эконо-

мического смысла задачи, равна остаткам ресурсов после выпуска оптимального плана. В рассматриваемой задаче, как уже было отмечено ранее ингредиенты какао-бобы и масло являются дефицитными на оптимальном плане, их *Допуск* равен нулю. В столбце *Состояние* этим ресурсам соответствует *привязка*, что означает равенство значений правых и левых частей ограничений. Сахар является недефицитным ресурсом, его остаток при оптимальном решении составляет 30 ед., а *Состояние* является *без привязки*, так общий запас превосходит общий расход на изготовление сладостей. Анализируя последнее ограничение задачи, видим, что при максимальном спросе в 25 кг на шоколад «Лакомка» оптимальное предложение состоит только из 20 кг. Ограничение на спрос шоколада «Лакомка» без привязки, допуск равен 5 кг.

«**Отчет о пределах**» состоит из двух таблиц (рис. 21).

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах

Ячейка	Целевая функция Имя	Значение
$D$2	План производства Суммарный доход	1400

Ячейка	Переменная Имя	Значение	Нижний Предел	Целевая функция Результат	Верхний Предел	Целевая функция Результат
$B$2	План производства Восхищение	5	0	900	5	1400
$C$2	План производства Лакомка	20	0	500	20	1400

Рис. 21. Отчет о пределах

Первая таблица в комментариях не нуждается, в ней приводится значение суммарного дохода на оптимальном плане. Вторая таблица указывает верхний и нижний пределы значений каждой переменной в задаче и изменения значения целевой функции при условии, что значение другой переменной соответствует оптимальному по плану. Другими словами, если производство шоколада «Лакомка» будет в объеме, соответствующем оптимальному плану, а шоколад «Восхищение» не будет производиться ($x_1 = 0$), то доход фирмы составит $f(x) = 0 \cdot 100 + 20 \cdot 45 = 900$ ден. ед. Если же шоколад «Восхищение» будем реализовывать в количестве 5 кг (оптимальное количество), получим максимальный доход в размере 1400 ден. ед. Аналогично можно провести рассуждения для шоколада «Лакомка».

«**Отчет об устойчивости**» состоит из двух таблиц (рис. 22).

Первая таблица «*Ячейки переменных*» связана с устойчивостью оптимального решения задачи. Рассмотрим более подробно всю представленную в ней информацию.

1. В столбце «*Окончательное значение*» отражено найденное оптимальное решение задачи.

2. «*Приведенная стоимость*» показывает, на сколько изменится максимальный доход в задаче в случае принудительного включения единицы нерентабельного продукта в оптимальное решение. В рассмотренном примере весь шоколад являются рентабельными, поэтому этот столбец таблицы содержит нулевые значения.

3. Столбец «*Целевая функция. Коэффициент*» содержит стоимость одного килограмма шоколада «Лакомка» и «Восхищение».

4. «*Допустимое увеличение*», «*Допустимое уменьшение*» указывает максимально возможные увеличение и уменьшение стоимости соответствующей продукции, при сохранении уровня цен остальных видов продукции, которые не приведут к изменению найденного оптимального решения (оптимального плана) задачи.

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Шоколад "Восхищение"	5	0	100	80	10
$C$2	Шоколад "Лакомка"	20	0	45	5	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	Какао-бобы	60	20	60	5	20
$D$8	Масло	40	5	40	20	5
$D$9	Сахар	30	0	60	1E+30	30

Рис. 22. Отчет об устойчивости

Вторая таблица «*Ограничения*» содержит информацию, относящуюся к ограничениям задачи.

1. В столбце «*Окончательное значение*» указано количество ресурсов, которые используются на производстве для реализации оптимального решения.

2. «*Теневая цена*» приведены двойственные оценки ресурсов. В литературе эти оценки называют «внутренняя цена», «условная стоимость», «скрытый доход» или «объективно обусловленными оценками». Эти оценки показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальный доход от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на единицу.

3. «*Ограничение. Правая сторона*» отражают количество каждого ресурса, которое имеется в наличие. Другими словами, правую часть основных ограничений задачи, описывающих использование ресурсов на производстве.

4. «*Допустимое увеличение*», «*Допустимое уменьшение*» указаны предельные значения приращения ресурсов, т.е. насколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое тре-

бование) ресурс, сохранив при этом структуру оптимального решения и теневые цены ресурсов.

Таким образом, пользуясь отчетом по устойчивости, можно провести постоптимальный анализ задачи, а именно:

- провести анализ устойчивости полученного решения при изменении стоимости продукции каждого вида;
- определить степень дефицитности ресурсов;
- установить устойчивость оптимального решения или оптимальных двойственных оценок ресурсов при изменении количества каждого ресурса;
- установить, как измениться максимальная прибыль при изменении запасов ресурсов на единицу;
- построить функции предельной эффективности ресурсов, а также найти зависимость максимальной прибыли от количества сырья, используемого на производстве.

Проанализируем данные, полученные в отчете об устойчивости в рамках рассматриваемого примера. Из первой таблицы оптимальное производство шоколада представляет собой вектор $x^* = (5, 20)$, а максимальная прибыль, как было найдено ранее, составляет 1400 ден. ед. Из первой строки следует, что полученное решение сохранится, если текущая стоимость шоколада «Восхищение» – 100 ден. ед. – максимально увеличится на 80 ден. ед. (до 180 ден. ед.) или уменьшится максимально на 10 ден. ед. (до 90 ден. ед.). Другими словами, диапазон изменения стоимости 1 кг шоколада «Восхищение» [90; 180] ден. ед. является диапазоном устойчивости найденного оптимального решения $x^* = (5, 20)$. Аналогично, опираясь на вторую строчку таблицы, получаем диапазон изменения стоимости шоколада «Лакомка». Текущая цена 45 ден. ед. может быть максимально увеличена на 5 ден. ед. или максимально уменьшена на 20 ден. ед., что не приведет к изменению оптимального производства шоколада. Таким образом, диапазон устойчивости найденного решения при изменении стоимость шоколада «Лакомка» составит [25; 50] ден. ед.

Исследуем характер основных ограничений в задаче. При решении двойственной задачи для рассматриваемого примера было получено решение $y^* = (20,\ 5,\ 0,\ 0)$. Переменные $y_1^* = 20,\ y_2^* = 5,\ y_3^* = 0$ соответствуют значениям, которые стоят в столбце «*Теневая цена*». Как уже было отмечено, отличные от нуля двойственные переменные соответствуют дефицитным ресурсам, а нулевые чаще всего – недефицитным.

Вернемся к первой таблице, а именно к столбцу «*Приведенная стоимость*». Здесь отражаются потери прибыли при выпуске 1 кг шоколада каждого рассматриваемого вида, т.е.

$$\textit{Приведенная стоимость} = c_j - a_{1j} y_1^* - \ldots - a_{ij} y_i^* - \ldots - a_{mj} y_m^* .$$

Согласно найденным двойственным оценкам ресурсов получаем:

Приведенная стоимость шоколада «Восхищение» $= 100 - 4 \cdot 20 - 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 = 0$;

Приведенная стоимость шоколада «Лакомка» $= 45 - 2 \cdot 20 - 1 \cdot 5 - 1 \cdot 0 = 0$.

Это означает, что по выпускаемому шоколаду потери прибыли являются нулевыми, что и представлено в отчете.

Вернемся ко второй таблице. Анализируя первый и третий столбцы, можно увидеть, что какао-бобы и масло являются дефицитными ресурсами, так как весь запас ингредиентов, который имеется в наличии, используется на производстве. Сахар используется не полностью, при запасе в 60 ед. используется только 30 ед., что подтверждает нулевая теневая цена ресурса, отражая его недефицитность. Поскольку какао-бобы и масло представляют собой дефицитные ресурсы, то любое изменение количества ингредиентов приведет к изменению оптимального решения задачи. Таким образом, используя последние столбцы таблицы, найдем диапазоны устойчивости структуры оптимального решения (ассортимента предлагаемого шоколада) и, как следствие, диапазоны устойчивости двойственных оценок при изменении количества ингредиентов. Опираясь на первую строчку, получаем, что количество какао-бобов в 60 ед. можно максимально увеличить на величину, не превышающую 5 ед. (до 65 ед.), или максимально уменьшить на величину, не превышающую 20 ед. (до 40 ед.), при этом ценность ресурсов и ассортимент производимого шоколада не изменятся. Другими словами, диапазон изменения количества какао-бобов (40; 65) ед. является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов. Аналогично количество масла в 40 ед. можно максимально увеличить на величину, не превышающую 20 ед., или максимально уменьшить на величину, не превышающую 5 ед., с сохранением структуры оптимального решения и ценности ресурсов. Таким образом, диапазон изменения количества масла (35; 60) ед. является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов. Поскольку сахар является недефицитным ингредиентом, то при любом увеличении (1Е+30 означает бесконечно большое число) и уменьшении максимально на 30 ед. оптимальное решение задачи не изменится, что как следствие сохраняет максимальную прибыль задачи. Таким образом, диапазон изменения сахара [30; $+\infty$) является диапазоном устойчивости двойственных оценок ресурсов.

Переменные $y_1^* = 20,\ y_2^* = 5,\ y_3^* = 0$ показывают не только дефицитность и недефицитность используемых ресурсов, но и, как было отмечено ранее, характеризуют ценность одной единицы ресурса в смысле увеличения прибыли. Следовательно, при увеличении какао-бобов на одну единицу суммарная прибыль увеличится на 20 ден. ед., а при увеличении масла на одну единицу прибыль возрастет на 5 ден. ед. Поскольку сахар является недефицитным ресурсом, то его увеличение на одну единицу не отражается на суммарном доходе.

Покажем теперь, как используя серию отчетов по устойчивости можно построить функцию предельной эффективности каждого ресурса. Опираясь на только, что проведенный анализ, получаем, что ценность одной единицы какао-бобов составляет 20 ден. ед., пока количество этого сырья находится в диапазоне (40; 65). Для дальнейшего расчета ценности единицы этого ресурса вернемся к компьютерной модели этой задачи, положив количество сырья равным 39 ед. Решив задачу с новым количеством какао-бобов, получаем новый отчет об устойчивости (рис. 23).

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Шоколад "Восхищение"	9,75	0	100	1E+30	10
$C$2	Шоколад "Лакомка"	0	-5	45	5	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	Какао-бобы	39	25	39	1	39
$D$8	Масло	39	0	40	1E+30	1
$D$9	Сахар	19,5	0	60	1E+30	40,5

Рис. 23. Отчет об устойчивости при уменьшении запаса какао-бобов

Из этого отчета следует, что ценность одной единицы кофейных зерен теперь изменилась и составляет 25 ден. ед. Эта теневая цена сохранится до тех пор, пока количество какао-бобов будет находиться в диапазоне (0; 40).

Установим предельную эффективность какао-бобов, увеличив количество до 66 ед. Решив задачу с новыми данными, получаем следующий отчет об устойчивости (рис. 24).

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Шоколад "Восхищение"	3,75	0	100	80	100
$C$2	Шоколад "Лакомка"	25	20	45	1E+30	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	Какао-бобы	65	0	66	1E+30	1
$D$8	Масло	40	25	40	1	15
$D$9	Сахар	32,5	0	60	1E+30	27,5

Рис. 24. Отчет об устойчивости при увеличении запаса какао-бобов

Анализируя полученный отчет, видим, что сырье становится недефицитным, следовательно, его ценность в качестве увеличения прибыли становится равной нулю. Поэтому любое увеличение данного ресурса никак не отражается на суммарном доходе фабрики.

Таким образом, функция предельной эффективности какао-бобов будет иметь вид: 25 ден. ед., пока количество ресурса находится в диапазоне (0; 40), 20 ден. ед., пока количество ресурса находится в диапазоне от [40; 65], и нулевая для любого количества ресурса больше 65 ед. При запасах какао-бобов в 40 и 65 ед. предельная эффективность какао-бобов определена неоднозначно. При 40 ед. она принимает значения от 20 до 25 ден. ед., при 60 ед. – от 0 до 20 ден. ед.

На основании проведенного компьютерного анализа задачи составлено полное описание функции предельной эффективности какао-бобов для данной фабрики, что полностью совпадает с таблицей, полученной в разделе 5.

Аналогично построим функции эффективности для масла и сахара. Ценность одной единицы масла составляет 5 ден. ед., пока количество масла находится в пределе от 35 до 60 ед. Найдем решение задачи при минимальном количестве масла из рассматриваемого диапазона (рис. 25).

	A	B	C	D	E
1	*Шоколад*	*Восхищение*	*Лакомка*	*Суммарный доход*	
2	*План производства*	2,5	25	1375	
3	*Стоимость 1 кг шоколада*	100	45		
4					
5					
6	*Ресурсы*	*Расход ресурсов на один килограмм*		*Суммарный расход*	*Запас*
7	*Какао-бобы*	4	2	60	60
8	*Масло*	4	1	35	35
9	*Сахар*	2	1	30	60
10					
11					
12	*Максимальный спрос на шоколад "Лакомка"*	25			
13					

Рис. 25. Компьютерная модель задачи при запасах масла в 35 ед.

Получаем оптимальное решение задачи $x^* = (2{,}5; 25)$, максимальный доход составляет 1375 ден. ед. Исходя из этого при изменении количества масла от 35 до 60 ед. прибыль фабрики будет пересчитываться по формуле $f(x^*) = 1375 + 5\Delta_1 b_2$, где $\Delta_1 b_2 = \bar{b}_2 - b_2 = \bar{b}_2 - 35$ при $\bar{b}_2 \in (35;\ 60)$. В качестве альтернативы пересчет дохода можно производить, опираясь на решение исходной задачи, поскольку максимальный доход в размере 1400 ден. ед. был получен при количестве масла, равном 40 ед., то любое изменение ресурса отразится на максимальном доходе следующим образом: $f(x^*) = 1400 + 5\Delta_1 b_2$, где $\Delta_1 b_2 = \bar{b}_2 - b_2 = \bar{b}_2 - 40$ при $\bar{b}_2 \in (35;\ 60)$.

Уменьшим запас ресурса до 34 ед. и, решив задачу, сформируем отчет об устойчивости (рис. 26).

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$2	Шоколад "Восхищение"	2,25	0	100	80	100
\$C\$2	Шоколад "Лакомка"	25	20	45	1E+30	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$7	Какао-бобы	59	0	60	1E+30	1
\$D\$8	Масло	34	25	34	1	9
\$D\$9	Сахар	29,5	0	60	1E+30	30,5

Рис. 26. Отчет об устойчивости при уменьшении запаса масла до 34 ед.

Отсюда вытекает, что ценность масла будет равна 25 ден. ед., пока количество этого ингредиента будет находиться в диапазоне от 25 до 35 ед. Для подсчета максимальной прибыли определим ее значение при минимальном количестве масла из этого диапазона (рис. 27).

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$2	Шоколад "Восхищение"	0	0	100	80	100
\$C\$2	Шоколад "Лакомка"	25	20	45	1E+30	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$7	Какао-бобы	50	0	60	1E+30	10
\$D\$8	Масло	25	25	25	10	0
\$D\$9	Сахар	25	0	60	1E+30	35

Рис. 27. Отчет об устойчивости при уменьшении запаса масла до 25 ед.

При количестве масла 25 ед. оптимальное решение будет иметь вид $x^* = (0, 25)$, а максимальный доход составит 1125 ден. ед. Поскольку ценность одной единицы масла в рамках исследуемого диапазона составляет 25 ден. ед., при любом его увеличении до 35 ед. доход будет меняться на величину $25\Delta_2 b_2$, где $\Delta_2 b_2 = \bar{b}_2 - b_2 = \bar{b}_2 - 25$ при $\bar{b}_2 \in (25;\ 35)$.

Таким образом, максимальный доход при любом изменении масла от 25 до 35 ед. вычисляется по формуле $f(x^*) = 1125 + 25\Delta_2 b_2$. Уменьшим еще количество ресурса до 24 ед. Результат показан на рис. 28.

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Шоколад "Восхищение"	0	-80	100	80	1E+30
$C$2	Шоколад "Лакомка"	24	0	45	1E+30	20

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	Какао-бобы	48	0	60	1E+30	12
$D$8	Масло	24	45	24	1	24
$D$9	Сахар	24	0	60	1E+30	36

Рис. 28. Отчет об устойчивости при уменьшении запаса масла до 24 ед.

Ценность одной единицы ресурса возросла до 45 ден. ед., и она сохранится для любого количества масла меньше 25 ед. Следовательно, для нахождения значения целевой функции достаточно подсчитать произведение $f(x^*) = 45b_2$, где $b_2 \in [0;\ 25)$. Установим предельную эффективность масла, увеличив их количество до 61 ед. Таким образом, получаем следующий отчет об устойчивости (рис. 29).

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Шоколад "Восхищение"	15	0	100	1E+30	10
$C$2	Шоколад "Лакомка"	0	-5	45	5	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	Какао-бобы	60	25	60	1	60
$D$8	Масло	60	0	61	1E+30	1
$D$9	Сахар	30	0	60	1E+30	30

Рис. 29. Отчет об устойчивости при увеличении запаса масла до 61 ед.

Масло становится недефицитным ресурсом, что делает ценность ресурса для изготовления шоколада нулевой. Отразим все проведенное исследование в табл. 5 и 6.

Таблица 5

Функция предельной эффективности масла

Ценность сырья y_i^*, ден. ед. / ед.	45	[25, 45]	25	[5, 25]	5	[5, 25]	0
Масло, ед.	(0; 25)	25	(25; 35)	35	(35;60)	60	(60; ∞)

Таблица 6

Зависимость максимального дохода от количества масла

Максимальная прибыль $f(x^*)$, ден. ед.	$45b_2$	$1125+\Delta_2 b_2$	$1375+\Delta_1 b_2$	1500
Масло, ед.	(0; 25)	[25; 35]	(35; 60]	(60; ∞)

Используя информацию табл. 5 и 6, построим графики этих функций (рис. 30, 31).

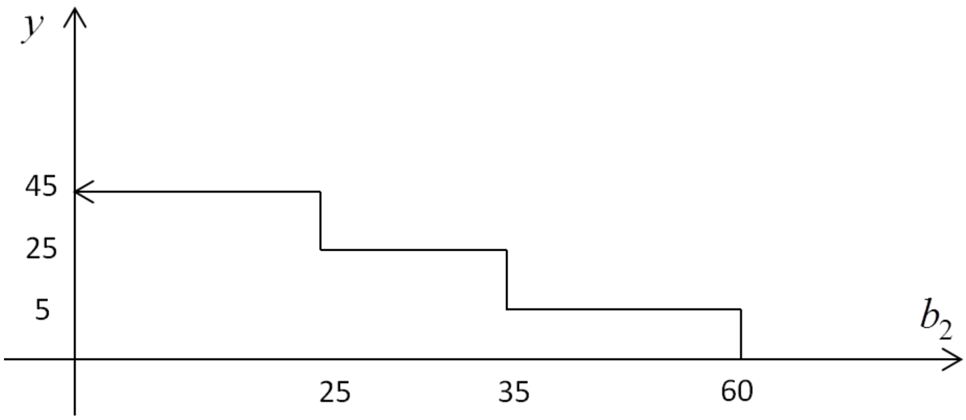


Рис. 30. График функции предельной эффективности масла

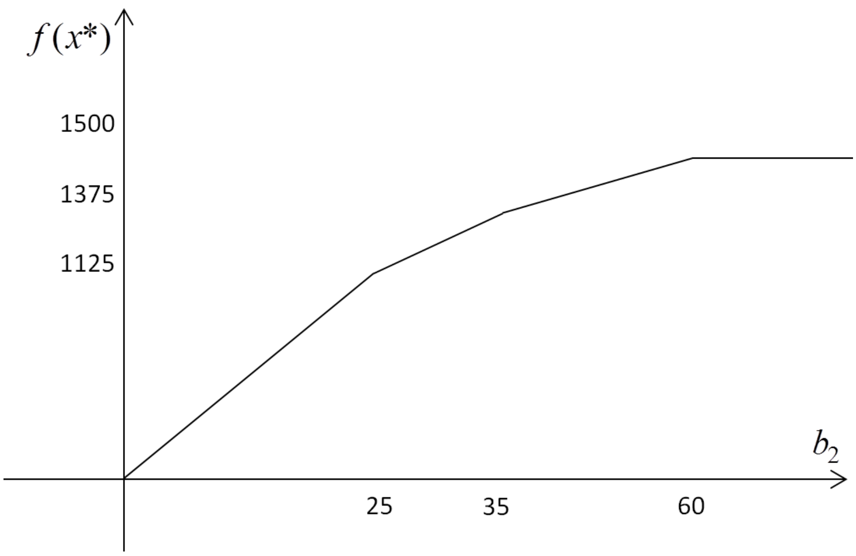


Рис. 31. График функции максимального дохода от количества масла

Осталось построить функцию предельной эффективности для недефицитного ресурса – сахара. Его ценность является нулевой, пока запас сахара больше 30 ед. Теперь уменьшим его количество на одну единицу и найдем решение полученной задачи (рис. 32).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости**								
2									
3									
4	Ячейки переменных								
5				Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое	
6		Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение	
7		$B$2	Шоколад "Восхищение"	5,5	0	100	80	10	
8		$C$2	Шоколад "Лакомка"	18	0	45	5	20	
9									
10	Ограничения								
11				Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое	
12		Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение	
13		$D$7	Какао-бобы	58	0	60	1E+30	2	
14		$D$8	Масло	40	5	40	18	7	
15		$D$9	Сахар	29	40	29	1	9	
16									
17									

Рис. 32. Отчет об устойчивости при уменьшении запаса сахара до 29 ед.

Ресурс стал дефицитным, и ценность одной единицы возросла до 40 ден. ед. Это значение не изменится, пока количество молока находится в пределах от 20 до 30 ед. Произведем пересчет дохода, используя результаты решения задачи при запасе сахара в 20 ед. (рис. 33).

	A	B	C	D	E
1	*Шоколад*	*Восхищение*	*Лакомка*	*Суммарный доход*	
2	*План производства*	10	0	1000	
3	*Стоимость 1 кг шоколада*	100	45		
4					
5					
6	*Ресурсы*	*Расход ресурсов на один килограмм*		*Суммарный расход*	*Запас*
7	*Какао-бобы*	4	2	40	60
8	*Масло*	4	1	40	40
9	*Сахар*	2	1	20	20
10					
11					
12	*Максимальный спрос на шоколад "Лакомка"*	25			
13					

Рис. 33. Компьютерная модель задачи при запасах сахара в 20 ед.

Таким образом, максимальное значение целевой функции при новых данных задачи равно 1000 ден. ед., следовательно, при изменении сахара в пределах от 20 до 30 ед. прибыль фабрики можно пересчитать по формуле $f(x^*) = 1000 + 40\Delta b_3$, где $\Delta b_3 = \overline{b_3} - b_3 = \overline{b_3} - 20$ при $\overline{b_3} \in (20;\ 30)$.

Продолжим уменьшение этого ингредиента. В результате получим новый отчет об устойчивости, когда запас сахара равен 19 ед. (рис. 34).

Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	Шоколад "Восхищение"	9,5	0	100	1E+30	10
$C$2	Шоколад "Лакомка"	0	-5	45	5	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$7	Какао-бобы	38	0	60	1E+30	22
$D$8	Масло	38	0	40	1E+30	2
$D$9	Сахар	19	50	19	1	19

Рис. 34. Отчет об устойчивости при уменьшении запаса сахара до 19 ед.

Ценность одной единицы сахара увеличилась до 50 ден. ед., что сохранится для запаса сырья от 0 до 20 ед. Отразим все проведенное исследование в табл. 7 и 8.

Таблица 7

Функция предельной эффективности сахара

Ценность сырья y_i^*, ден. ед. / ед.	50	$40 \le y_i^* \le 50$	40	$0 \le y_i^* \le 40$	0
Сахар, ед.	(0; 20)	20	(20; 30)	30	(30; ∞)

Таблица 8

Зависимость максимальной прибыли от количества сырья

Максимальная прибыль $f(x^*)$, ден. ед.	$50 b_3$	$1000+40\,\Delta b_3$	1400
Сахар, ед.	(0; 20)	[20; 30]	(30; ∞)

Используя информацию табл. 7 и 8, построим графики этих функций (рис. 35, 36).

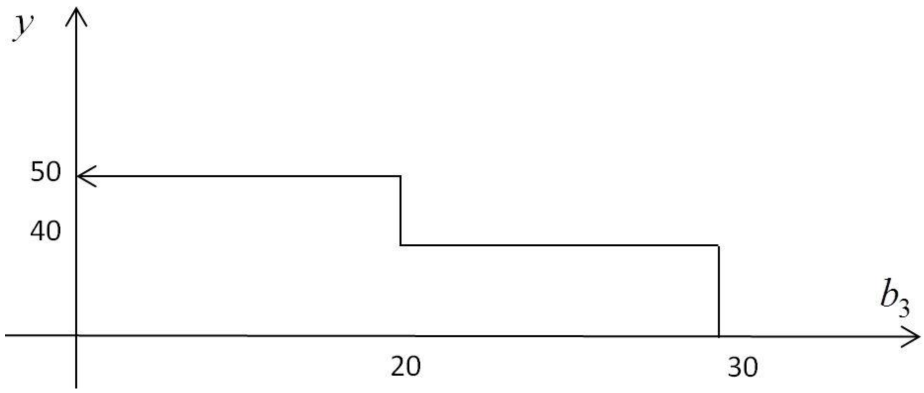


Рис. 35. График функции предельной эффективности сахара

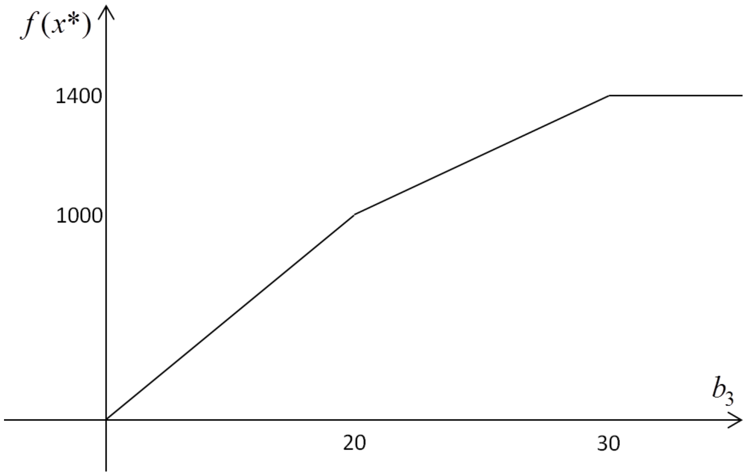


Рис. 36. График функции максимального дохода от количества сахара

7. Задача о производстве конфет: анализ различных ситуаций

В пособии рассмотрены примеры использования линейных моделей и методов, цель которых – найти оптимальную стратегию управления в условиях, когда все параметры и правила функционирования управляемой системы четко определены и не подвержены никаким случайным воздействиям.

В реальной жизни вряд ли может существовать «полная определенность». Однако, несмотря на то, что жизнь полна случайностей, сложна и неоднозначна, часто возникают ситуации, когда мы склонны это игнорировать. В одних ситуациях случайные воздействия на интересующий нас процесс управления не учитываются потому, что они малы и несущественны, в других – случайные факторы, которые могут оказать сильное и негативное влияние на нашу деятельность (поломки оборудования, катастрофы, социальные потрясения и т.п.), к счастью, проявляются достаточно редко. Поэтому, если не считать мероприятий страхования от их последствий, мы также не склонны учитывать их в наших ежедневных планах.

В приведенных ниже примерах широко используется метод линейной оптимизации. Рассматриваются задачи, цель которых – составление оптимальных планов. Речь может идти об оптимальных планах производства, продаж, закупок, перевозок, об оптимальном финансовом планировании, оптимальной организации рекламной кампании или об оптимальном плане инвестиционного портфеля фирмы. Планирование – одна из основных функций менеджмента. В пособии приводятся кейсы и задачи, посвященные линейной оптимизации. Почему же так важны модели линейной оптимизации? Это связано с тем, что очень много важных для практики проблем, относящихся к самым разным сферам деятельности, могут быть проанализированы с помощью моделей линейного программирования и при этом существуют эффективные и универсальные алгоритмы решения задач линейной оптимизации, реализованные в общедоступном программном обеспечении. Разработанные методы анализа моделей оптимизации не только позволяют получить оптимальное решение, но и дают информацию о том, как может изменяться это решение при изменении параметров модели. Именно эта информация, позволяющая получить ответы на вопросы типа «что, если», представляет особую ценность для лица, принимающего решение.

Рассмотрим следующий пример.

Ситуация 1

Маленькая кондитерская фабрика должна закрыться на реконструкцию. Необходимо реализовать оставшиеся запасы сырья для производства продуктов из ассортимента фабрики, получив максимальную прибыль. Запасы и расход каждого вида сырья для производства одного пакета продукции каждого вида, а также нормы прибыли для каждого продукта (прибыль на один пакет) представлены в табл. 9.

Таблица 9

Сырье	Запасы, кг	Продукты, расход сырья (кг) на один пакет продукции				
		«Ореховый звон»	«Райский вкус»	«Батончик»	«Белка»	«Ромашка»
Темный шоколад	1411	0,8	0,5	1	2	1,1
Светлый шоколад	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
Сахар	815,5	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05
Карамель	466	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5
Орехи	1080	0,7	0,1	0,9	1,5	0
Прибыль от одного пакета, у.е.		1	0,7	1,1	2	0,6

В разговоре с владельцем фабрики мастер, используя свой 20-летний опыт, предлагает на глазок выпустить по 200 пакетов каждого продукта, утверждая, что ресурсов «должно хватить», а прибыль получится, очевидно, 1080 у.е. При разговоре присутствует сын владельца фабрики, который утверждает, что такие проблемы надо решать не на глазок, а с помощью линейного программирования. Умиленный отец обещает отдать сыну всю прибыль сверх 1080 у.е., если он предложит лучший план, чем многоопытный мастер.

Анализ ситуации 1

Введем переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – количество пакетов конфет каждого вида, которые планирует производить фабрика. При этом целевую функцию – прибыль от производства – можно записать как сумму произведений количества произведенных пакетов каждого вида конфет на норму прибыли от одного пакета соответствующего продукта:

$$f(x) = x_1 + 0,7x_2 + 1,1x_3 + 2x_4 + 0,6x_5.$$

Ограничения состоят в том, что расход каждого из сырьевых ресурсов на весь производственный план не должен превышать запас данного ресурса.

Расход темного шоколада на план выпуска продукции составит величину

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + x_3 + 2x_4 + 1,1x_5 \text{ (кг)},$$

запас темного шоколада равен 1411 кг. Расход сырья не может превысить его запас, поэтому должно выполняться неравенство

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + x_3 + 2x_4 + 1,1x_5 \le 1411 \text{ (кг)}.$$

Аналогично получим ограничения по использованию светлого шоколада, сахара, карамели и орехов:

$$0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 0,2x_5 \le 149,$$
$$0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3 + 1,3x_4 + 0,05x_5 \le 815,5,$$
$$0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,3x_3 + 0,7x_4 + 0,5x_5 \le 466,$$
$$0,7x_1 + 0,1x_2 + 0,9x_3 + 1,5x_4 \le 1080.$$

Учтем, что объемы выпуска продукции не могут быть отрицательными и количество выпускаемых пакетов продукции может быть только целым. В итоге получим математическую модель рассматриваемой задачи:

$$f(x) = x_1 + 0,7x_2 + 1,1x_3 + 2x_4 + 0,6x_5 \to \max,$$
$$0,8x_1 + 0,5x_2 + x_3 + 2x_4 + 1,1x_5 \le 1411,$$
$$0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 0,2x_5 \le 149,$$
$$0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,6x_3 + 1,3x_4 + 0,05x_5 \le 815,5,$$
$$0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,3x_3 + 0,7x_4 + 0,5x_5 \le 466,$$
$$0,7x_1 + 0,1x_2 + 0,9x_3 + 1,5x_4 \le 1080,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0,$$
$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 - \text{целые}.$$

Построим компьютерную модель полученной задачи (рис. 37). В ячейку G2 введена целевая функция, представляющая собой сумму произведений прибылей от продажи одного пакета каждого вида конфет (ячейки B3, C3, D3, E3, F3) на произведенное количество каждого продукта (ячейки B2, C2, D2, E2, F2). В ячейках B2, C2, D2, E2, F2 содержатся переменные модели. В ячейках G7, G8, G9, G10, G11 введены формулы, отражающие расход ресурсов на весь производственный план выпуска конфет.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*	
2	*План производства*	1	1	1	1	1	5,40	
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,1	2	0,6		
4								
5								
6	*Сырье*	*Расход сырья на один пакет конфет*					*Суммарный расход*	*Запас*
7	*Темный шоколад*	0,8	0,5	1	2	1,1	5,40	1411
8	*Светлый шоколад*	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,70	149
9	*Сахар*	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05	2,65	815,5
10	*Карамель*	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5	2,00	466
11	*Орехи*	0,7	0,1	0,9	1,5	0	3,20	1080
12								

Рис. 37. Компьютерная модель задачи о производстве конфет

Остается сформулировать задачу для надстройки **Поиск решения**. После того, как мы зададим целевую функцию, которую необходимо максимизировать, и изменяемые ячейки, необходимо задать ограничения в задаче. В данном случае оно будет только одно, если задавать его для группы ячеек: суммарный расход ресурсов, рассчитанный в ячейках G7, G8, G9, G10, G11, не должен превышать запасы на складе, записанные в ячейках H7, H8, H9, H10, H11 (рис. 38).

Укажем, что переменные являются неотрицательными, и выберем метод решения – **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**. После команды **Найти решение** получим решение (рис. 39).

Согласно найденному решению для получения максимальной прибыли в размере 1509,09 у.е. необходимо выпускать 454,48 пакета конфет «Ореховый звон», 58,78 пакета конфет «Райский вкус», 503,99 пакета конфет «Белка», 9,13 пакета конфет «Ромашка», а конфеты «Батончик» не выпускать вообще.

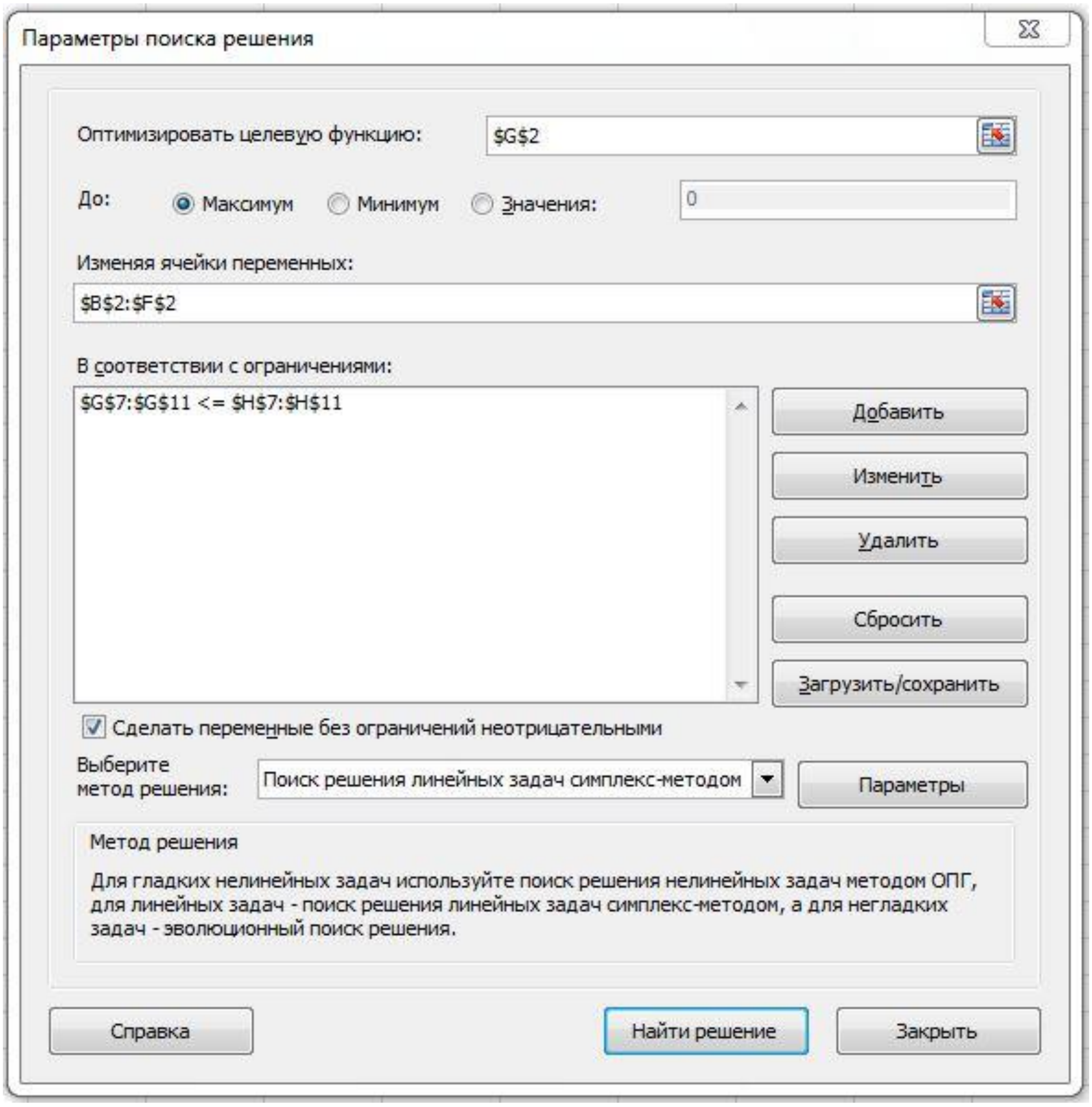


Рис. 38. Компьютерная модель задачи о производстве конфет в надстройке **Поиск решения**

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*	
2	*План производства*	454,48	58,78	0,00	503,99	9,13	1509,09	
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,1	2	0,6		
4								
5								
6	*Сырье*	*Расход сырья на один пакет конфет*					*Суммарный расход*	*Запас*
7	*Темный шоколад*	0,8	0,5	1	2	1,1	1411,00	1411
8	*Светлый шоколад*	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	149,00	149
9	*Сахар*	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05	815,50	815,5
10	*Карамель*	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5	465,89	466
11	*Орехи*	0,7	0,1	0,9	1,5	0	1080,00	1080
12								

Рис. 39. Решение задачи о производстве конфет без учета целочисленности переменных

Полученное решение не соответствует содержательному смыслу задачи, поскольку часть переменных принимает дробные значения, что невозможно в силу того, что это количество пакетов конфет. Подкорректируем задачу с учетом этого условия. В надстройке **Поиск решения** существует возможность потребовать целочисленность переменных задачи. Для этого достаточно добавить еще одно ограничение (рис. 40).

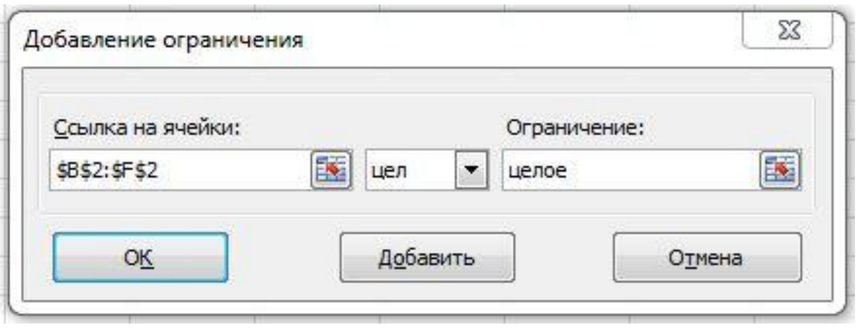


Рис. 40. Добавление ограничения о целочисленности переменных

В левом поле окна указать ячейки, содержащие переменные модели, из предлагаемых ограничений выбрать ограничение «цел». Прежде чем находить решение, нужно в диалоговом окне **Поиска решения** зайти в **Параметры** (рис. 41).

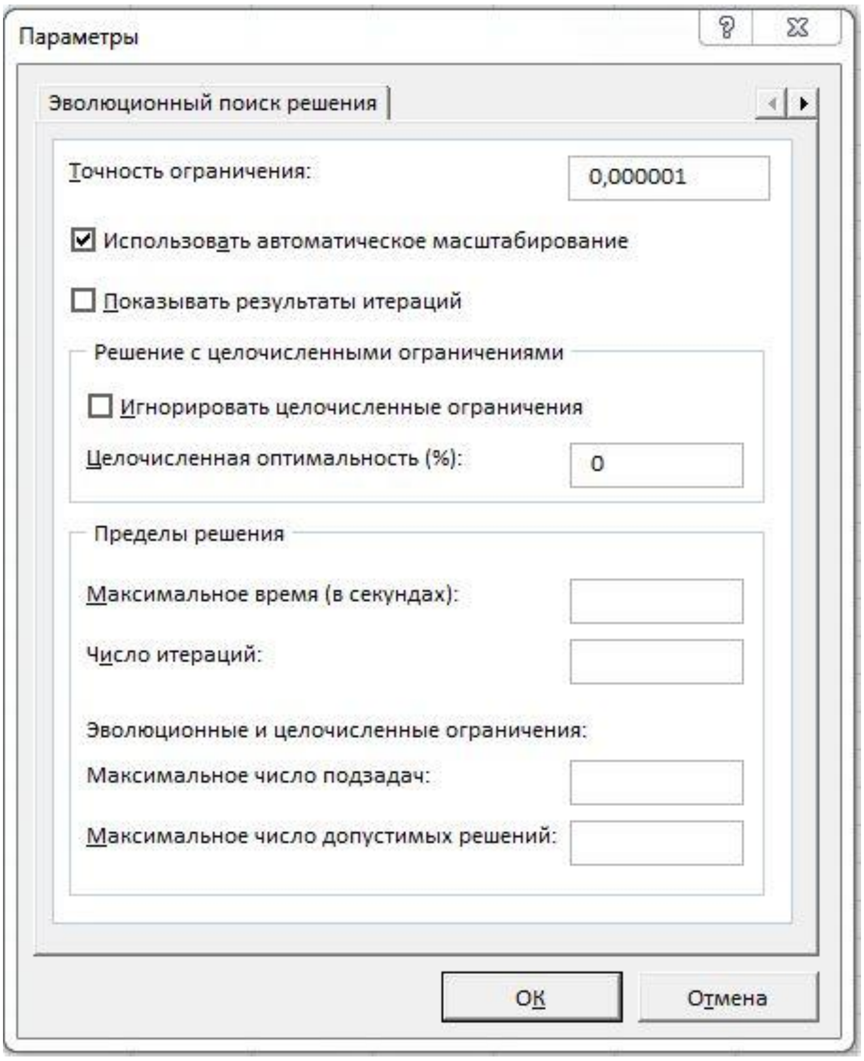


Рис. 41. Диалоговое окно **Параметры**

В этом окне интерес представляет *Целочисленная оптимальность*. Она показывает, насколько далеко от целого числа может принимать значения переменная. Поставим в соответствующем окне 0. Теперь переходим к решению задачи. Получаем следующее целочисленное решение (рис. 42).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*	
2	*План производства*	450,00	60,00	10,00	500,00	10,00	1509,00	
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,1	2	0,6		
4								
5								
6	*Сырье*	*Расход сырья на один пакет конфет*					*Суммарный расход*	*Запас*
7	*Темный шоколад*	0,8	0,5	1	2	1,1	1411,00	1411
8	*Светлый шоколад*	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	149,00	149
9	*Сахар*	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05	815,50	815,5
10	*Карамель*	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5	466,00	466
11	*Орехи*	0,7	0,1	0,9	1,5	0	1080,00	1080
12								

Рис. 42. Решение задачи о производстве конфет
с учетом целочисленности переменных

С учетом нового условия оптимальный план выпуска пакетов конфет будет иметь вид: 450 пакетов конфет «Ореховый звон», 60 пакетов конфет «Райский вкус», 10 пакетов конфет «Батончик», 500 пакетов конфет «Белка» и 10 пакетов конфет «Ромашка», а максимальная прибыль составит 1509 у.е.

В данной задаче отличие целочисленного решения от ранее полученного без учета целочисленности переменных решения по величине прибыли весьма мало. При этом следует иметь в виду, что добавление в задачу ограничения целочисленности переменных исключает возможность получения отчетов о пределах и об устойчивости, которые, как мы уже видели, дают чрезвычайно важную информацию для анализа задачи, обеспечивают общий взгляд на исследуемую проблему и более глубокое ее понимание. Задача с целочисленными переменными гораздо более сложна для исследования, а алгоритмы ее решения гораздо менее универсальны и эффективны. Разумеется, в некоторых случаях без условия целочисленности не обойтись.

Ситуация 2

После решения задачи об оптимальном плане производства для родной кондитерской фабрики сын владельца испытал двойственной чувство. С одной стороны, прибыль, соответствующая найденному им производственному плану, на 429 у.е. больше, чем по плану мастера. Это здорово! С другой стороны, почему компьютер практически отказался от выпуска «Батончика» (его с раннего детства любимого лакомства)? Юноша уверен, что «Батончик» – один из лучших продуктов, который выпускает фабрика отца. Если его не окажется на прилавках, может пострадать имидж фабрики. Ведь не только он сам, но и все соседи в округе очень любят эту конфету!

Итак, ответьте на следующие вопросы.

1. Как надо изменить норму прибыли для любимого продукта сына хозяина фабрики («Батончика»), чтобы он вошел в оптимальный план?

2. Введите это изменение в данные и решите задачу заново. Как изменился оптимальный план?

3. Есть ли другой способ добиться производства «Батончика» (кроме изменения нормы прибыли)?

Анализ ситуации 2

Для того, чтобы разбрататься в ситуации, требуется провести анализ решения. В этом нам поможет отчет об устойчивости решения, поэтому вернемся еще раз в надстройку **Поиск решения**, удалим условие целочисленности и найдем прежнее решение. Когда **Поиск решения** сообщит, что решение найдено, отметим в правом окне пункт **Устойчивость**. На новом листе будет получен отчет следующего вида (рис. 43).

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$2	*Ореховый звон*	454,48	0	1	0,05	0,02
$C$2	*Райский вкус*	58,78	0	0,7	0,04	0,35
$D$2	*Батончик*	0,00	-0,0087	1,1	0,01	1E+30
$E$2	*Белка*	503,99	0	2	0,96	0,02
$F$2	*Ромашка*	9,13	0	0,6	0,10	0,04

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$G$7	*Темный шоколад*	1411	0,05	1411	0,26	7,95
$G$8	*Светлый шоколад*	149	2,50	149	1,04	11,87
$G$9	*Сахар*	815,5	1,01	815,5	0,39	20,09
$G$10	*Карамель*	465,89	0	466	1E+30	0,11
$G$11	*Орехи*	1080	0,23	1080	16,04	0,32

Рис. 43. Отчет об устойчивости в задаче о производстве конфет без учета целочисленности переменных

Согласно отчету об устойчивости, «*Приведенная стоимость*» конфеты «Батончик», не вошедшей в оптимальный план, составляет 0,0087 у.е. Абсолютная величина этого числа показывает, на сколько нужно увеличить прибыль от производства одного пакетика этих конфет, чтобы «Батончик» вошел в оптимальный план. С точки зрения анализа ситуации малость этого числа (менее 0,8 % нормы прибыли) свидетельствует о том, что, если мы «насильно» заставим **Поиск решения** запланировать выпуск «Батончика» (например, введя условие D2 >= 100), большого уменьшения прибыли не произойдет.

Давайте проверим это умозаключение и потребуем, чтобы количество произведенных пакетиков «Батончика» было не менее 100 (рис. 44).

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*
2	*План производства*	411,70	73,40	100,00	462,98	15,11	1508,11
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,1	2	0,6	
4							

Рис. 44. Решение задачи о производстве конфет при дополнительном ограничении на выпуск конфет «Батончик»

Прибыль уменьшилась менее чем на 1 у.е. Интересно, а какое же количество «Батончика» запланирует выпустить **Поиск решения**, если мы изменим его норму прибыли, как подсказывает отчет об устойчивости?

Добавим к цене «Батончика» чуть большее число, чем «*Приведенная стоимость»* «Батончика» – 0,01 у.е., чтобы заведомо изменить оптимальный план. При этом мы можем быть уверены, что «Батончик» войдет в оптимальный план, но не можем знать заранее, в каком количестве, и не можем определить, как изменится количество других конфет.

В этом случае прибыль на единицу этого продукта станет равной 1,11 у.е. Еще раз запустим **Поиск решения** (рис. 45).

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*
2	*План производства*	0,00	217,50	1067,50	65,00	70,00	1509,18
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,11	2	0,6	
4							

Рис. 45. Решение задачи о производстве конфет при изменении нормы прибыли от конфет «Батончик»

Видно, сколь сильно отличается это решение от базового, хотя значения прибыли практически одинаковы. В таких случаях обычно говорят, что решение неустойчиво.

Решение называется неустойчивым, если малые изменения параметров приводят к большим изменениям решения.

О неустойчивости говорят чаще всего в негативном смысле, подразумевая даже, что она ограничивает возможности аналитика использовать количественные методы для принятия управленческих решений. Однако в данном случае неустойчивость решения не создает никаких проблем: ведь прибыль-то в обоих случаях почти одинакова.

Таким образом, в нашем распоряжении оказывается множество альтернативных решений, сильно различающихся по значениям переменных, но очень близких по прибыли. Наличие альтернативных решений, с одной стороны, позволяет менеджеру выбрать такое, которое в наилучшей степени отвечает тем или иным неформальным требованиям и условиям, которые всегда присутствуют при принятии решений. С другой стороны, такой выбор не прост.

Прежде всего, обратим внимание на то, что любой производственный план есть результат конкуренции продуктов за ресурсы. Заметим, что у «Батончика», не вошедшего в оптимальный план, прибыль за единицу продукта отнюдь не самая низкая: «Ореховый звон», «Райский вкус» и «Ромашка» менее прибыльны. Тем не менее «Батончик» проиграл конкуренцию за ресурсы, и его *приведенная стоимость* показывает, как много он проиграл.

Эксперимент с увеличением нормы прибыли «Батончика» показывает, что основной его конкурент – конфеты «Белка» и «Ореховый звон». При небольшом изменении нормы прибыли «Батончика» в оптимальном плане объем выпуска конфет «Белка» уменьшился с 500 до 65 пакетов, конфеты «Ореховый звон» стало невыгодно выпускать. Разумно предположить, что конкурируют они за наиболее дефицитные ресурсы, т.е. те, которые имеют более высокие теневые цены. Такими ресурсами являются светлый шоколад и сахар.

К сожалению, никакого алгоритма, который бы показал, какой ресурс и на сколько нужно увеличить, чтобы снять (или смягчить) конкуренцию «Батончика», «Белки» и «Орехового звона», нет. Можно, однако, попробовать увеличить один из дефицитных ресурсов на величину, выходящую за пределы интервала устойчивости его запаса, и заново решить задачу на максимум. При этом можно добиться, чтобы в плане присутствовали значительные количества пакетиков и «Батончика», и «Белки», и «Орехового звона».

В больших задачах линейного программирования подобное исследование может быть весьма трудоемким. Прямого ответа на поставленный вопрос отчет об устойчивости не дает. Однако ориентиром в таком исследовании может служить, например, теневая цена ресурса.

Ситуация 3

После проведенного анализа сын владельца фабрики принес свой первый оптимальный план в цех и с гордостью показал мастеру. Тот на мгновение нахмурился, но затем с облегчением вздохнул и громко засмеялся:

– Ну что ж, молодой человек, замечательно! Будем реализовывать! Только учти, что по технологии до (или после) производства конфеты «Белка» (особенно в таком количестве, как ты рекомендуешь) надо остановить производственную линию и тщательно ее вычистить, а то будет брак! А стоит такая очистка 400 у.е.! Так что с премией своей можешь попрощаться.

Что же делать? Надо срочно пересчитать оптимальный план с учетом этой постоянной издержки.

Анализ ситуации 3

Прежде всего, приступим непосредственно к анализу неожиданно возникшей проблемы сына хозяина кондитерской фабрики. Заметим, что попытка учета постоянных издержек наталкивается на фундаментальное ограничение моделей линейного программирования. Действительно, целевая функция в линейной модели должна быть представлена как сумма произведений целевых коэффициентов на переменные задачи:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n .$$

Если трактовать x_j как количество произведенных единиц продукта j-го типа, а коэффициенты c_j – как издержки на единицу произведенного продукта (или прибыль на единицу продукта, т.е. цена минус издержки на производство одного изделия), то очевидно, что принимаются в расчет только те издержки, которые пропорциональны количеству выпущенных изделий. Эти издержки называются переменными. К ним относятся оплата сдельного труда, расход материалов, электроэнергии и пр.

Однако наряду с переменными издержками с процессом производства (или обслуживания) всегда связаны и постоянные издержки. К издержкам такого рода можно отнести затраты на аренду помещений, оплату работы менеджеров и вспомогательных служб, на связь и оргтехнику и пр.

Если эти расходы одинаковы независимо от вида производимой продукции, то они не влияют на определение оптимального плана выпуска продукции. Их просто можно прибавить к оптимальным переменным издержкам (или вычесть из оптимальной прибыли), определенным путем решения оптимизационной задачи.

Представим, однако, что на одной и той же производственной линии можно производить различные продукты, причем для производства каждого нового продукта нужно произвести переналадку оборудования, что для каждого продукта характеризуется своими затратами. В таком случае вид целевой функции должен быть существенно изменен.

Заметим, что встречающаяся в бухгалтерском учете практика «размазывания» постоянных издержек по всей партии выпущенных изделий и увеличение, таким образом, величины издержек на одно изделие совершенно неприменима при решении задач линейного программирования. В этой задаче количество выпущенных изделий данного типа – это переменная x_j, подлежащая определению (т.е. заранее неясно, на какое количество изделий нужно «размазать» постоянные издержки), а издержка (или прибыль) на одно произведенное изделие c_j должна быть постоянной (т.е. не зависящей от количества выпущенных изделий).

Вернемся теперь к анализу ситуации на кондитерской фабрике. Введем в рассмотрение величину постоянных издержек 400 у.е., связанную с производством конфет «Белка».

Будем считать, что постоянные издержки появляются, когда произведен хотя бы один пакет этих конфет. Она не зависит от того, как много пакетиков «Белки» произведено. Однако если «Белка» не производится вообще, то этих издержек нет.

В этих условиях целевая функция прибыли

$$f(x) = x_1 + 0,7x_2 + 1,1x_3 + 2x_4 + 0,6x_5, \text{ если } x_4 = 0,$$
$$f(x) = x_1 + 0,7x_2 + 1,1x_3 + 2x_4 + 0,6x_5 - 400, \text{ если } x_4 > 0.$$

Целевую функцию можно записать в компьютерной модели одной формулой, воспользовавшись функцией СУММПРОИЗВ, описанной ранее, и функцией ЕСЛИ (рис. 46).

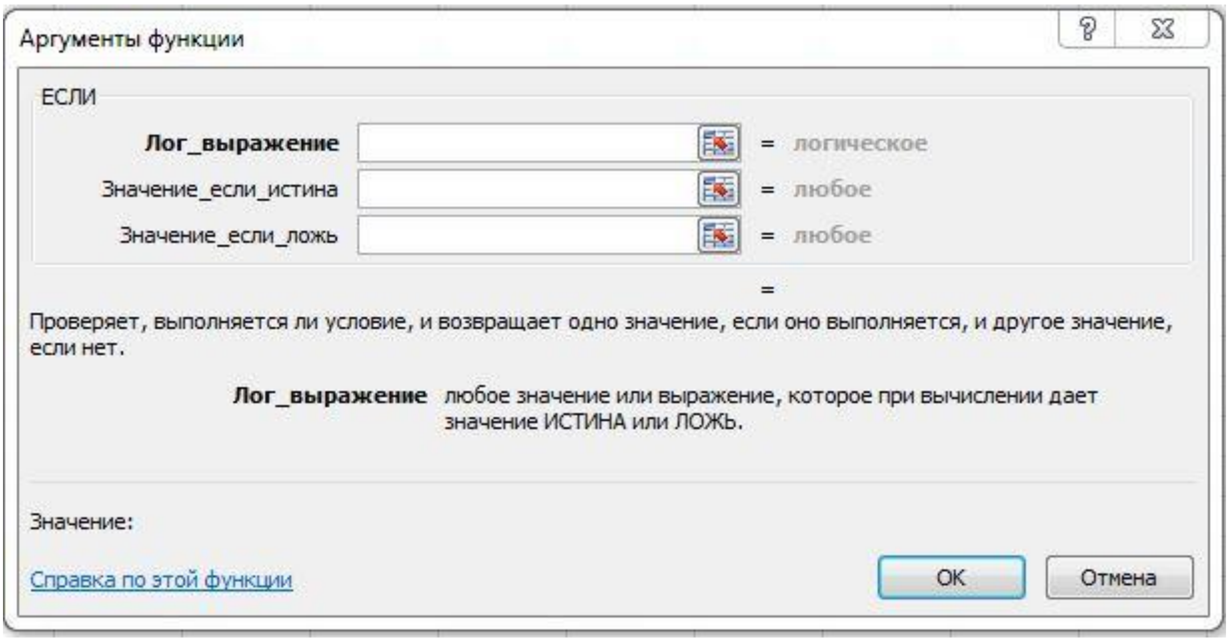


Рис. 46. Функция ЕСЛИ

Функция прибыли в компьютерной модели примет вид:

СУММПРОИЗВ(B2:F2;B3:F3)-ЕСЛИ(E2>0;400;0).

Однако такая функция не является линейной и не может быть использована в задачах линейного программирования. Для подобных случаев существует специальный прием, позволяющий явно не использовать функцию =ЕСЛИ(…).

Введем одну дополнительную бинарную (двоичную) переменную s и одно дополнительное ограничение вида

$$x_4 - M \cdot s \leq 0,$$

где M – очень большое число, превышающее количество пакетов конфет «Белка», которое могла выпустить фабрика, если бы она все запасы ресурсов тратила на выпуск исключительно данных конфет. Например, зададим M = 10 000. Если «Белка» выпускается, то переменная $s = 1$, если «Белка» не выпускается, то переменная $s = 0$ и из прибыли не вычитается ничего.

Кроме того, заменим целевую функцию на следующую:

$$f(x) = x_1 + 0,7x_2 + 1,1x_3 + 2x_4 + 0,6x_5 - 400s.$$

Запишем в ячейке B14 величину постоянных издержек (400) для конфет «Белка», а ячейку B13 будем использовать для значений дополнительную переменной. При этом для корректировки расчета прибыли нужно написать в ячейку G2 формулу

=СУММПРОИЗВ(B2:F2;B3:F3)-B13*B14.

Если «Белка» выпускается, то переменная $s=1$ и из прибыли вычитается 400 у.е. постоянных издержек на очистку линии. Если «Белка» не выпускается, то переменная $s=0$ и из прибыли не вычитается ничего.

Разумеется, без дополнительного ограничения **Поиск решения** заведомо не станет присваивать переменной s значение 1, ибо это невыгодно. Поэтому в ячейку B15 запишем формулу =E2-10000*B14, т.е. объем выпуска пакетов конфет «Белка» – 10000, умноженное на переменную s, – и затем потребуем в установках **Поиска решения**, чтобы это выражение было не больше 0.

В этом случае, если объем выпуска пакетов конфет «Белка» не равен нулю, **Поиск решения** сможет удовлетворить заданное ограничение, только если задаст $s=1$. Величина 10000 здесь просто произвольное большое число, превышающее любой возможный (при данных ресурсах) объем выпуска конфет. Если конфеты «Белка» не выпускаются и значение ячейки E2 равно нулю, то **Поиск решения** волен выбирать в качестве значения переменной s и ноль, и единицу. Но при выборе в качестве цели максимума прибыли алгоритм, конечно, и теперь уже совершенно правомерно, оставит переменную s равной нулю.

Таким образом, получаем следующие таблицы (рис. 47).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*	
2	*План производства*	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-394,60	
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,1	2	0,6		
4								
5								
6	*Сырье*	*Расход сырья на один пакет конфет*					*Суммарный расход*	*Запас*
7	*Темный шоколад*	0,8	0,5	1	2	1,1	5,40	1411
8	*Светлый шоколад*	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,70	149
9	*Сахар*	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05	2,65	815,5
10	*Карамель*	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5	2,00	466
11	*Орехи*	0,7	0,1	0,9	1,5	0	3,20	1080
12								
13	*Дополнительная переменная*	1						
14	*Издержки*	400						
15	*Дополнительное ограничение*	-9999						
16								

Рис. 47. Компьютерная модель задачи для ситуации 3

Чтобы переменная s принимала только значения 1 и 0, добавим соответствующее ограничение (рис. 48).

Ячейку B14 необходимо также внести в список переменных.

Замечание: чтобы указать в качестве переменных несвязанные ячейки или диапазоны, нужно сначала выделить один диапазон, затем нажать на клавиатуре кнопку Ctrl и, удерживая ее, выделить второй диапазон, третий и т.д.

Итак, к нашему исходному групповому ограничению добавится еще два: новая бинарная переменная и конструкция =E2-10000*B14 в ячейке B15 меньше и равна нулю (рис. 49).

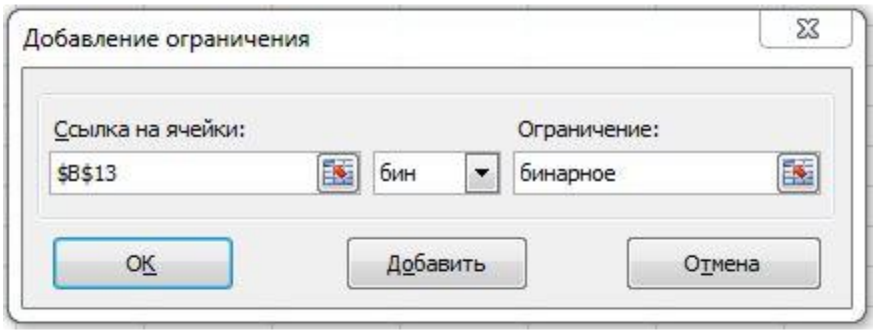


Рис. 48. Добавление условия о бинарности дополнительной переменной

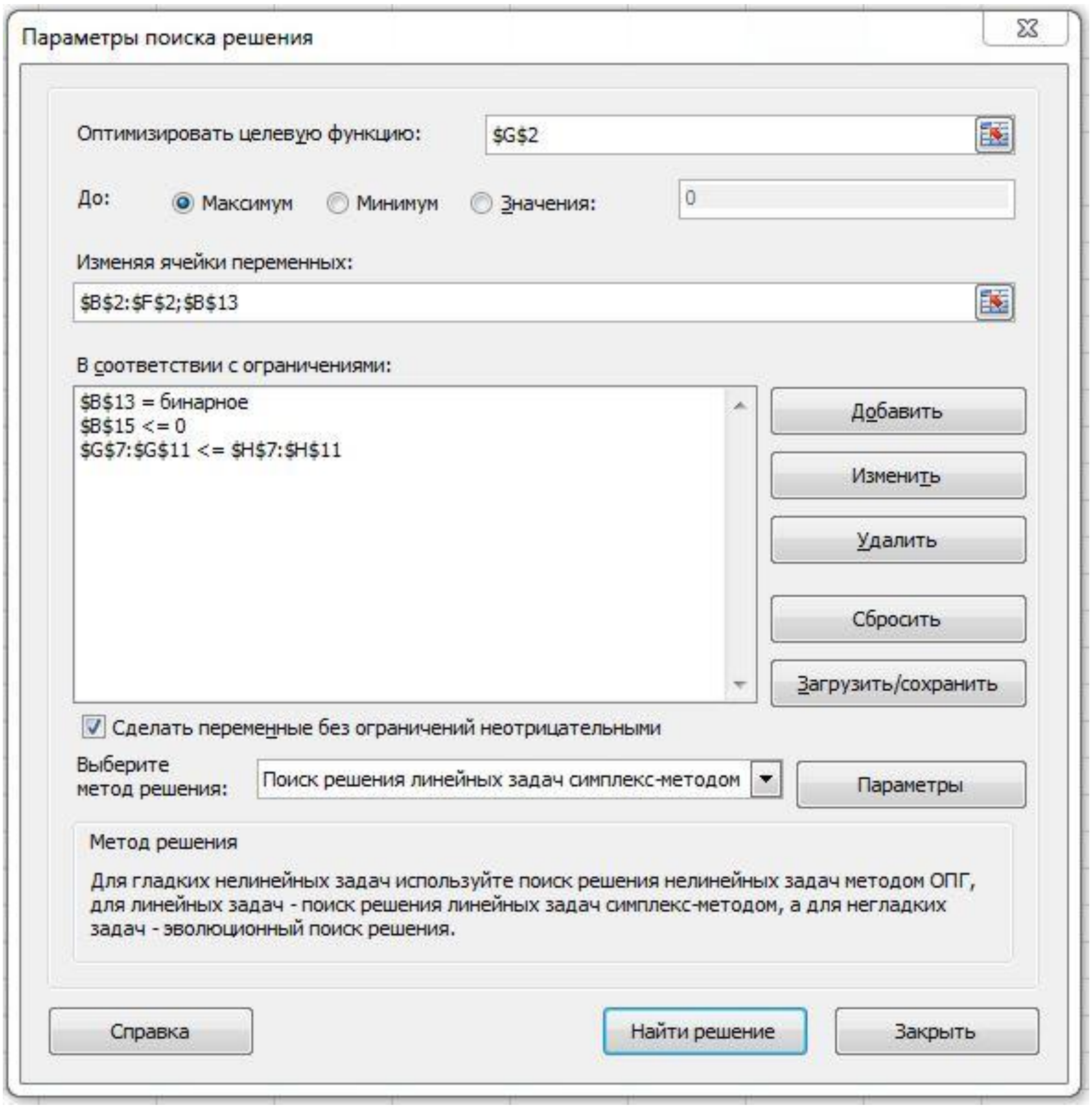


Рис. 49. Компьютерная модель задачи в надстройке поиск решения для ситуации 3

Если все сделано правильно, запуск **Поиска решения** на выполнение принесет следующий результат (рис. 50).

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*
2	*План производства*	0,00	283,66	1168,48	0,00	18,93	1495,25
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,1	2	0,6	
4							

Рис. 50. Оптимальный план производства для ситуации 3

Кроме очевидных изменений в оптимальном плане, следует отметить главное – целевая функция уменьшилась по сравнению с прежним результатом всего на 14,84 у.е.

Возвращаясь к хитрому приему, который позволил нам обойти использование функции =ЕСЛИ(…), следует проверить, при каких условиях алгоритм вообще «захочет» включить конфеты «Белка» в план производства. Очевидно, что при достаточной прибыльности этих конфет это должно быть выгодным. Вот только мы теперь не имеем инструмента в виде отчета об устойчивости, который мог бы нам подсказать, сколько именно прибыльности не хватает «Белке», чтобы войти в оптимальный план. Ведь при использовании целочисленных ограничений такой отчет создать невозможно.

Придется действовать методом подбора. В первоначальном плане пакетиков конфет «Белка» производилось в количестве 500 штук. Значит, чтобы вернуться к этому плану, окупив постоянные издержки в 400 у.е., одной дополнительной единицы прибыли должно хватить. И действительно, при изменении прибыли от пакета конфет «Белка» до 3 у.е. оптимальное решение включает эту конфету в оптимальный план почти в прежнем объеме (рис. 51).

	A	B	C	D	E	F	G
1	*Конфеты*	*Ореховый звон*	*Райский вкус*	*Батончик*	*Белка*	*Ромашка*	*Суммарная прибыль*
2	*План производства*	396,47	0,00	0,00	534,98	21,69	1614,43
3	*Прибыль от одного пакета конфет*	1	0,7	1,1	3	0,6	
4							

Рис. 51. Оптимальный план производства, если прибыль от одного пакета конфет «Белка» равна 3 у.е.

При этом переменная s оказывается равной 1 и из прибыли вычитается 400 у.е. на издержки по очистке линии. Таким образом, использованный нами прием способен не только «запрещать» выпуск конфет, но и «разрешать» его при подходящих условиях.

8. Примеры задач линейного программирования и бизнес-кейсы

В предыдущих разделах были рассмотрены этапы создания математических моделей, и существенным дополнением к этим этапам является обращение к библиотеке существующих математических моделей и операций, которые они описывают. Важность этого дополнения обусловливается тем, что за многие годы анализа и исследования самых разнообразных операций получено большое количество оптимизационных математических моделей, с определенной степенью адекватности описывающих реальные операции. В то же время создание собственной модели – дело непростое, и поэтому целесообразно сначала поискать операцию, наиболее близкую к изучаемой, и соответствующую ей адекватную математическую модель. И только если таковая отсутствует, можно попытаться составить собственную оптимизационную математическую модель или несколько модифицировать существующую. Поэтому целью данного раздела является не только ознакомление с различными операциями и их адекватными моделями, входящими в библиотеку математических моделей, но и с технологией построения. Ясное понимание этих технологий необходимо для того, чтобы правильно выбирать адекватную своей операции модель, грамотно модифицировать уже существующую или, наконец, построить собственную модель.

8.1. Планирование производства

Пример 1. Фабрика производит три типа изделий – *A, B, C*, используя для этого два вида сырья – S_1 и S_2. Расход сырья на одно изделие, его запасы на неделю и цена реализации единицы продукции приведены в таблице.

Вид сырья	Расход сырья на одно изделие, ед. сырья / ед. продукции			Запас сырья, ед.
	A	*B*	*C*	
S_1	1	3	4	9
S_2	2	2	3	8
Цена, дол.	5	10	12	

Ограничения на спрос на продукцию на изделия *A*, *B*, *C* не выявлены.

Найти недельный план выпуска продукции, максимизирующий суммарный доход.

Построение математической модели. Введем переменные x_1, x_2, x_3 – объемы выпуска изделий *A, B, C*, которые фабрика планирует производить за неделю. Целевая функция – функция дохода – составляется с учетом цен на изделия:

$$f(x) = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3.$$

Цель в задаче – максимизация дохода от реализации произведенных изделий:

$$f(x) = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 \to \max.$$

Ограничения в задаче связаны с ограниченностью запасов сырья. Расход сырья S_1 на недельный план выпуска продукции (производственный спрос на сырье S_1) составит величину

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \text{ (ед.)},$$

запас сырья S_1 (предложение) равно 9 ед. Расход (спрос) сырья не может превысить его запас (предложение), поэтому должно выполняться неравенство

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 9.$$

Аналогично получим ограничение по использованию сырья S_2:

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8.$$

Учтем, что объемы выпуска продукции не могут быть отрицательными. В итоге получим математическую модель рассматриваемой задачи:

$$\begin{gathered} f(x) = 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 \to \max, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

Пример 2. Фермер владеет 100 акрами земли, на которых планирует вырастить урожай трех зерновых культур – *A*, *B* и *C*. Для засева одного акра требуется зерна *A* на сумму 40 дол., *B* – на сумму 20 дол. и *C* – на сумму 30 дол. Фермер располагает средствами в размере 3200 дол. Для сбора урожая необходимо затратить по одному рабочему дню на уборку с одного акра культур *A* и *C* и два рабочих дня на уборку с одного акра культуры *B*, но фермер может работать на уборке урожая не более 160 дней. Фермер планирует продать урожай зерна *A*, собранного с одного акра, за 140 дол., зерна *B* – за 320 дол. и зерна *C* – за 230 дол. Определить, сколько акров земли должен отвести фермер под каждую культуру, чтобы после реализации урожая получить максимальную прибыль.

Построение математической модели. Для составления математической модели введем искомые переменные: пусть x_1, x_2, x_3 – количество акров земли, отпущенные под культуры *A*, *B* и *C* соответственно. Ограниченными в задаче являются общая площадь засева, затраты на приобретение зерна и необходимое количество рабочих дней. Площадь под засев ограниченна 100 акрами земли, поэтому

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100.$$

Общая цена зерна *A*, *B* и *C* для засева соответствующих площадей выражается в виде суммы

$$40x_1 + 20x_2 + 30x_3.$$

С учетом ограничений выделенные средства имеем:

$$40x_1 + 20x_2 + 30x_3 \le 3200.$$

Количество дней, необходимых на уборку культур, не превосходит 160. А с учетом ограничения на продолжительность уборки соответствующее ограничение имеет вид

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 160.$$

Наконец, планируемый доход после продажи всего урожая запишется в виде суммы $140x_1 + 320x_2 + 230x_3$. За вычетом явных издержек на приобретение зерна прибыль составит

$$(140-40)x_1 + (320-20)x_2 + (230-30)x_3.$$

Объединив полученное и приняв во внимание требование максимизации прибыли, запишем математическую модель задачи:

$$f(x) = 100x_1 + 300x_2 + 200x_3 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 100,$$
$$40x_1 + 20x_2 + 30x_3 \le 3200,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 160,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Пример 3. Известно, что для изготовления бензина *АИ-80*, *АИ-92* и *АИ-95* используются составляющие трех видов – *А*, *В* и *С*. На изготовление бензина *АИ-80* идет 50 % составляющей *А*, 25 % составляющей *В* и 25 % составляющей *С*. На производство бензина *АИ-92* идет 60, 25 и 15 % составляющих *А*, *В* и *С* соответственно. Для бензина *АИ-95* аналогичные данные следующие: 65, 20 и 15 %. Составить модель, на основе которой предприятие, имеющее в наличии на данный плановый период 100 т продукта *А*, 40 т продукта *В* и 30 т продукта *С*, решает задачу получения максимальной прибыли от реализации бензина, если от продажи тонны бензина *АИ-80* она составляет 1000 ден. ед., от продажи тонны бензина *АИ-92* – 1200 ден. ед., а от продажи тонны бензина *АИ-95* – 1500 ден. ед.

Построение математической модели. Представим данные задачи в виде таблицы.

Составляющие продукты	Содержание составляющих в бензине, %			Запас продуктов, т
	АИ-80	*АИ-92*	*АИ-95*	
А	50	60	65	100
В	25	25	20	40
С	25	15	15	30
Прибыль от продажи 1 т, ден. ед.	1 000	1 200	1 500	

Пусть x_1, x_2, x_3 – количество тонн бензина *АИ-80*, *АИ-92* и *АИ-95* соответственно, планируемое к реализации. Тогда с учетом имеющегося запаса составляющей *А* ограничение на количество этого продукта, содержащегося в каждой марке бензина, имеет вид

$$0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}65x_3 \le 100.$$

Аналогичные ограничения на составляющие *В* и *С* описываются следующими неравенствами:

$$0{,}25x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}2x_3 \le 40 \text{ – продукт } B;$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}15x_3 \le 30 \text{ – продукт } C.$$

Прибыль же от реализации бензина всех трех марок есть сумма $1000x_1 + 1200x_2 + 1500x_3$. Тогда математическая модель этой задачи принимает вид

$$f(x) = 1000x_1 + 1200x_2 + 1500x_3 \to \max,$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}65x_3 \le 100,$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}2x_3 \le 40,$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}15x_3 \le 30,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Пример 4. При производстве четырех видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км кабеля каждого вида, а также общее количество рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку кабеля вида				Общее количество рабочего времени, ч
	А	*Б*	*В*	*Г*	
Волочение	1,2	2	1,6	2,4	7 200
Наложение изоляций	1	0,4	0,8	0,8	5 600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6	8	12 000
Освинцовывание	3	–	1,8	2,4	3 600
Испытание и контроль	2	1,5	0,8	3	4 200
Прибыль от реализации 1 км кабеля	1,2	0,8	1	1,2	

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции является максимальной.

Пример 5. Фирма, специализирующаяся на производстве пищевых полуфабрикатов, выпускает три различных продукта: I – картофельные дольки, II – картофельные кубики, III – картофельные хлопья. Фирма может закупать картофель у двух различных поставщиков – *A* и *B*. При этом объемы продуктов I, II, III, которые можно получить из 1 т картофеля поставщика *A*, отличаются от объемов продуктов I, II, III, которые можно получить из 1 т картофеля поставщика *B*. А именно: из 1 т картофеля поставщика *A* можно изготовить 0,2 т продукта I, 0,2 т продукта II и 0,3 т продукта III. Из 1 т картофеля поставщика *B* можно изготовить 0,3 т продукта I, 0,1 т продукта II и 0,3 т продукта III.

Прибыль фирмы при покупке картофеля у поставщика *A* составляет 0,5 дол. / кг, а при покупке картофеля у поставщика *B* – 0,6 дол. / кг. Фирма может реализовать не более 1,8 т продукта I, 1,2 т продукта II и 2,4 т продукта III.

Составить план закупки картофеля у обоих поставщиков, при котором прибыль фирмы была бы максимальной.

Пример 6. Конкуренция приводит к необходимости торговым предприятиям заниматься еще и выпуском продукции собственного производства, например салатов, пиццы и т.п. Нормы затрат на производство разных видов пиццы, объемы ресурсов и стоимость приведены в таблице.

Продукты	Нормы затрат на изготовление 100 шт. пиццы, кг			Запасы продуктов, кг
	Ассорти	Грибная	Салями	
Грибы	6	7	2	22
Колбаса	5	2	8	31
Тесто	10	8	6	50
Цена за 100 шт., тыс. р.	9	6	5	

Определить, в каком количестве следует производить пиццы, чтобы доход был максимальным.

Пример 7. Предприятие занимается «отверточной» сборкой бытовой электронной аппаратуры трех наименований: телевизоров, стереосистем и акустических систем. Склад предприятия вмещает ограниченное количество компонентов: шасси, кинескопов, громкоговорителей, источников питания, комплектов радиодеталей.

Название детали	Количество на складе	Потребность на одно изделие		
		телевизоры	стереосистемы	акустические системы
Шасси	450	1	1	0
Кинескоп	250	1	0	0
Громкоговоритель	800	2	2	1
Источник питания	450	1	1	0
Радиодетали, компл.	600	2	1	1
Прибыль на одно изделие, ден. ед.		75	50	35

Пример 8. Один из заводов легкой промышленности производит порошок для изготовления солодовых напитков трех видов. Один из них продается в качестве напитка здоровья, поскольку имеет низкое содержание сахара, другой напиток поставляется в медицинские учреждения в качестве продукции для больных, поскольку содержит витаминные добавки, наконец, третий является стандартным товаром. В приведенной ниже таблице для каждого напитка указаны основные ингредиенты, их стоимость и размер недельного запаса, а также оценки максимального спроса на соответствующие товары за неделю.

	Расход ингредиентов на 1 кг продукта, кг			Оценка максимального спроса за неделю, кг	Цена продажи 1 кг напитка, у.е.
	Сахар	Солодовый экстракт	Сухие сливки		
Стандартный напиток	0,30	0,30	0,35	2000	1,00
Напиток здоровья	0,15	0,25	0,55	1800	1,20
Напиток для больных	0,15	0,30	0,25	1200	1,50
Стоимость 1 кг ингредиентов, у.е.	0,20	0,60	0,50		
Размер недельного запаса ингредиентов, кг	1 000	1 250	2 200		

Запас витаминных добавок неограничен. Издержки производства остальных переменных имеют следующие значения: 0,1 у.е. за 1 кг стандартного напитка, 0,09 у.е. за 1 кг напитка здоровья и 0,12 у.е. за 1 кг напитка для больных.

Требуется определить оптимальный недельный ассортиментный набор выпуска порошков, максимизирующий прибыль завода.

Последние исследования потребительского рынка показали, что напиток здоровья приобретает всё большую популярность. Новое значение максимального спроса составило 2500 кг в неделю. Каково воздействие этого процесса на оптимальный ассортиментный набор?

Администрация компании обдумывает решение о покупке некоторого дополнительного количества солодового экстракта. Однако компания будет иметь дело с новым поставщиком и покупать сырье по 0,8 у.е. за 1 кг. Позволит ли такая мера увеличить еженедельный доход? Если это так, то каково максимальное количество сырья, которое следует купить у нового поставщика?

Пример 9. Компания «Пауэр Кулинг» производит семь различных изделий. Обозначим их условно как I, II, III, IV, V, VI, VII. Для их производства используется три основных типа сырья – *A, B* и *C*. Причем для следующей рабочей недели подготовлено и обработано специальным образом 500 кг сырья *A*, 750 кг сырья *B* и 350 кг сырья *C*.

В процессе производства используется основное оборудование двух типов: Handler-310 и UniPolisher-1200. С учетом переналадок и сервисного обслуживания Handler-310 имеет ресурс 12 рабочих часов в день, а UniPolisher-1200 – 15 рабочих часов.

В таблице отражены требования на ресурсы со стороны всех семи изделий и приносимая каждым из них прибыль.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Прибыль, дол. / ед.	580	350	450	300	225	350	50
A, кг / ед.	0,2	0,3	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2
B, кг / ед.	0,4	0,1	0,2	0,2	0,4	0,3	0,2
C, кг / ед.	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1
Handler-310	0,04	0,03	0,04	0,02	0,01	0,02	0,01
UniPolisher-1200	0,05	0,035	0,02	0,04	0,02	0,03	0,06

Необходимо найти оптимальный план производства на предстоящую неделю: сколько и каких изделий выпустить? Следует учесть, что вы уже имеете заказ на изделие IV – 100 шт. В то время как большинство изделий не имеет рыночных ограничений – сколько ни произведи, все они будут проданы, для изделий II и V такие ограничения существуют. Производить больше 600 шт. изделия II и больше 700 шт. изделия V в неделю неразумно.

1. Постройте задачу линейного программирования.

2. Коммерческий менеджер полагает, что можно было бы увеличить отпускную цену изделия IV на 50 дол. за штуку. Изменит ли такое повышение цены полную прибыль на следующей неделе?

3. Менеджер закупочного отдела с сожалением заключает, что он не сможет получить большее количество ресурса *C* от обычного поставщика. Есть и другой поставщик этого ресурса, однако он готов поставить его только по цене на 900 дол. за 1 кг выше, чем обычный поставщик. Вдобавок он хочет продать не менее 50 кг. Следует ли принимать предложение о дополнительной покупке 50 кг? Следует ли купить еще больше ресурса *C*?

4. Клиент, который ожидал 100 шт. изделий IV на будущей неделе, теперь пытается уговорить менеджера «Пауэр Кулинг» поставить ему на будущей неделе на 50 шт. изделий IV больше. На каких условиях можно согласиться на этот запрос?

5. Заместитель генерального директора «Пауэр Кулинг» по производству нашел возможность увеличить рабочий ресурс Handler-310 на 4 ч в день. Оплата сверхурочных будет стоить на 4500 дол. за час больше, чем обычные издержки. Стоит ли использовать 20 сверхурочных часов на следующей неделе? Если нет, то какое количество сверхурочных следует использовать исходя из максимума прибыли?

Пример 10. Менеджер производственного отдела фирмы, выпускающей электронное оборудование, составляет оптимальный план выпуска трех типов магнитофонов. Необходимая информация суммирована в таблице.

Тип	Сборка, ч	Проверка, ч	Упаковка, мин	Себестоимость, дол.	Цена, дол.
A	5	1,2	8	70	110
B	3	1,0	8	60	90
C	2	1,6	8	50	85
Ресурсы рабочего времени	500 ч	160 ч	900 мин		

1. Какое количество магнитофонов каждого типа нужно собирать, чтобы максимизировать прибыль?

2. Все ли типы моделей выгодно производить? Если имеется убыточная модель, что нужно изменить, чтобы ее производство стало выгодным? Можно ли изменить что-то в технологии или в ценах так, чтобы все модели стали выгодными? Попробуйте сделать это, представьте варианты решений.

3. Представьте, что вы можете установить 100 сверхурочных часов на сборку или 2 сверхурочных часа на упаковку. Что более выгодно? Подтвердите все ваши ответы вычислениями.

Пример 11. Владелец мебельной фабрики рассматривает возможность ввода на своем предприятии сверхурочной работы и хочет оптимизировать использование этого дополнительного времени. Фирма выпускает пять различных изделий: стулья, столы, бюро, книжные шкафы и сервировочные тележки. Соответствующая прибыль за единицу – 16, 30, 40, 42 и 32 дол. Продукция требует одних и тех же основных операций: обрезки, шлифовки, отделки и сборки. Необходимое для выполнения этих операций время для каждого изделия приведено в таблице.

Изделие	Время на операцию, мин		
	Обрезка	Шлифовка	Отделка и сборка
Стул	8	12	4
Стол	6	10	3
Бюро	9	15	5
Книжный шкаф	9	12	4
Сервировочная тележка	12	8	6

Имеется 320 мин для обрезки, 400 мин для шлифовки и 270 мин для отделки и сборки в планируемое сверхурочное время.

1. Какая комбинация изделий должна быть произведена в это время, чтобы максимизировать прибыль? Какой будет общая прибыль?

2. Выгодно ли производить все изделия? Если имеется изделие, которое невыгодно производить, что нужно изменить, чтобы его производство стало выгодным?

3. Можно ли изменить что-то в технологии или в ценах так, чтобы производство всех изделий стало выгодным? Исследуйте это. Опишите результаты.

4. Допустим, что вы можете установить 100 сверхурочных минут, но только для одной из основных операций. На какую операцию стоит выделить это время? Сколько при этом получится прибыли? Подтвердите все ваши ответы вычислениями.

Пример 12. Фирма производит два важных изделия для больших лодок и кораблей – Z345 и W250, причем в двух модификациях: стандартной и индустриальной, каждая из которых требует определенного количества специально обработанных цинка и железа. Фирма получает доход в 400 дол. на каждое стандартное изделие Z345 и в 500 дол. на каждое стандартное изделие W250. Индустриальные изделия дают 40 % дополнительного дохода.

Каждую неделю фирма может обработать и подготовить для производства до 2500 кг цинка и 2800 кг железа. В таблице представлено количество цинка и железа, необходимое для производства каждого изделия

	Z345		W250	
	Стандартная	Индустриальная	Стандартная	Индустриальная
Цинк	25	46	16	34
Железо	50	30	28	12

Фирма имеет контракт на поставку стандартных и индустриальных изделий в сумме не менее 20 шт. каждую неделю. Политика фирмы состоит в том, чтобы не менее 50 % всей продукции составляли индустриальные изделия, и чтобы ни количество изделий Z345, ни количество изделий W250 не превышало 75 % всей произведенной продукции. Руководство фирмы полагает, что, только следуя этой политике, фирма сможет продать всю произведенную продукцию.

1. Какой еженедельный план производства максимизирует прибыль фирмы? Какую интерпретацию вы можете дать для дробных значений количества изделий каждой модели (если они присутствуют в оптимальном плане)?

2. Как изменится прибыль, если ограничение на производство не более 75 % каждого вида изделий будет ослаблено или отменено?

3. Обоснуйте, стоит ли фирме закупить в предстоящую неделю дополнительное количество цинка, если за него придется заплатить цену больше, чем обычно платит фирма за цинк:

- 100 кг при переплате 1500 дол.,
- 100 кг при переплате 2600 дол.,
- 800 кг при переплате 10 000 дол.,
- 900 кг при переплате 12 000 дол.,
- 900 кг при переплате 25 000 дол.

4. Доход от продажи продукции каждого типа может изменяться в зависимости от рыночной ситуации. Насколько чувствителен оптимальный план к таким изменениям?

Бизнес-кейс

Производство минеральных плит

(задачу предложил А.С. Довнар, управляющий производством ЗАО «Минеральная вата»)[12]

Фабрика производит материалы для строительства – различные виды плит, используемые для изоляции зданий. В таблице приведены данные о прибыльности разных видов плит, спросе на них в расчете на один месяц и плотности материала. На фабрике есть две поточные линии. Производство функционирует в две смены по 8 ч. Каждая и удовлетворяет рыночный спрос полностью.

Однако одна из поточных линий нуждается в техническом обслуживании. При этом нужно будет закрыть линию не менее чем на один месяц, но рыночный спрос в этот период должен быть полностью обеспечен.

	Прибыль, дол. / м^3	Ожидаемый спрос, м^3	Плотность, кг / м^3
Light batts	25	23 000	40
Venti batts	15	8 000	110
Cavity batts	15	6 500	50
Roof batts	18	7 000	160
Facade batts	20	6 000	200
Sandvich batts	20	2 000	130
Beton batts	15	4 500	110

Для этой цели можно использовать две возможности:

А – в предшествующий остановке месяц загрузить обе линии работой в три смены и произвести необходимое количество плит в запас;

Б – импортировать плиты из-за границы через компанию, с которой уже установлены рабочие связи.

В случае импорта прибыль от продажи плит уменьшится на 40 %.

Фабрика имеет склад, на котором можно вдобавок к обычному объему запасов различных материалов и готовой продукции хранить 27 000 м^3 плит. Все, что нужно будет хранить сверх этого, придется разместить на соседнем складе, что будет стоить 3 дол. за 1 м^{3}в месяц.

Собственное производство ограничено складом сырья, вместимость которого не позволяет хранить более 1500 т порфирита и 1000 т шлака (являющихся главными компонентами изделий) сверх обычного количества. Обычно соотношение сырья, используемого в процессе производства, следующее: 50 % порфирита, 30 % шлака и 20 % плит (брак, отходы обработки и т.п.). Потери сырья в производстве – 8 %. Расчеты показывают, что такого количества сырья совершенно недостаточно для производства всех 57 000 м^3 плит.

К счастью, есть возможность использовать для хранения сырья железнодорожные вагоны. Железнодорожное ведомство при этом взимает плату в размере 100 дол. / вагон в день. Вместимость каждого вагона – 60 т. Предварительные переговоры показывают, что можно будет использовать не более 15 вагонов. Для простоты предположите, что каждый нанятый вагон будет использоваться в среднем в течение половины месяца.

1. Каково оптимальное решение этой задачи? Какая наибольшая прибыль может быть достигнута?

2. Сколько плит следует импортировать?

8.2. Задачи производственного и управленческого учета

Пример 1. Фирма, занимающаяся остеклением, пользуется стандартными расценками за квадратный метр по всему перечню товаров

	Замена окон, ден. ед.	Двери веранд, ден. ед.	Другие виды остекления, ден. ед.
Материалы: стекло	4,00	6,00	3,50
рамы	1,34	1,37	0,90
Затраты труда: изготовители	5,46	7,98	3,36
установщики	4,50	9,00	1,00
Цена реализации	40,00	50,00	20,00
Ожидаемый объем продаж, м^2	7 800	3 800	8 000

Постоянные затраты составляют 300 000 ден. ед за отчетный период. Изготовители получают заработную плату 4,2 ден. ед. за час, этих специалистов не хватает. Ожидается, что время их труда для удовлетворения спроса ограничено 18 400 ч.

1. Определите наиболее рентабельный курс производства.

2. В случае увеличения заработной платы изготовителей на 1 ден. ед. потребности в данных изделиях могут быть удовлетворены за счет привлечения фирмой специалистов. Оцените новую ситуацию с точки зрения:

- рентабельности;
- других факторов.

Пример 2. Внутриполитические неурядицы в стране поставщика вызывают опасения у фирмы относительно дальнейших поставок сырья *X*, которые могут быть сорваны. Объем имеющегося в наличии сырья равен 17 000 кг, его стоимость – 136 000 ден. ед. Используя сырье *X*, фирма производит продукцию пяти различных видов. Данные о спросе на каждый вид этой продукции, ожидаемый в течение следующих трех месяцев, а также необходимая в связи с этим информация приведены ниже.

Код изделия	Количество сырья на 1 ед. готового изделия, кг	Труд основных производственных рабочих на 1 ед. готового изделия, ч	Цена реализации 1 ед., ден. ед.	Ожидаемый спрос
701	0,7	1,0	26	8 000
702	0,5	0,8	28	7 200
821	1,4	1,5	34	9 000
822	1,3	1,1	38	12 000
937	1,5	1,4	40	10 000

Ставка заработной платы основных производственных рабочих – 5 ден. ед. за час. Производственные накладные расходы распределяются по данным о затратах на заработную плату: переменные накладные расходы поглощаются по норме 40 %, а постоянные накладные расходы – по норме 60 %. Переменные расходы на реализацию, включая комиссионные, составляют 15 % цены реализации. Сметные постоянные торговые и административные расходы составляют 300 000 ден. ед. в год.

Допуская, что фактические постоянные производственные накладные расходы равны поглощенным:

1. Определите, какое количество сырья на производство каких товаров необходимо выделить для получения максимальной прибыли в следующие три месяца.

2. Кратко изложите сведения о предполагаемой валовой прибыли и прибыли в течение ближайших трех месяцев в случае принятия решения, предложенного по п. 1.

3. Кратко прокомментируйте результат анализа, проведенного в процессе решения по п. 1, и приведите три примера коммерческих задач, к которым применим данный анализ.

8.3. Задачи оптимального смешивания

Пример 1. По предписанию врача пациенту необходимо перейти на витаминную диету и за сезон употребить витамина B_1 и витамина B_2, содержащихся во фруктах, в количествах не менее, чем указано в таблице

Витамины	Содержание витаминов в 1 кг фруктов, ед.			Норма потребления витаминов, ед.
	Клубника	Яблоки	Смородина	
Витамин B_1	3	2	1	31
Витамин B_2	1	3	4	69
Цена за 1 кг, р.	80	40	64	

Составить математическую модель, по которой можно определить, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить за сезон, чтобы выполнить предписание врача с минимальными расходами.

Построение математической модели. Для данной задачи модель строится следующим образом: пусть $x_1 (кг)$ – количество клубники, $x_2 (кг)$ – количество яблок, $x_3 (кг)$ – количество смородины, которое планируется купить за сезон. Тогда расходы на фрукты можно записать суммой

$$80x_1 + 40x_2 + 64x_3.$$

Витамин B_1 содержится во всех фруктах, поэтому общее его количество за сезон в рационе составит

$$3x_1 + 2x_2 + x_3.$$

Аналогично для витамина B_2 –

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3.$$

Так как минимальное количество витаминов B_1 и B_2 в диете составляет 31 и 69 ед. соответственно, то это условие запишем как неравенства

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 31,$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 69.$$

Тогда, с учетом условия неотрицательности переменных, модель задачи минимизации расходов будет выглядеть следующим образом:

$$f(x) = 80x_1 + 40x_2 + 64x_3 \to \min,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 31,$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 69,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Пример 2. Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1 500 000 л алкилата, 1 200 000 л крекинг-бензина и 1 300 000 л изопентана. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1 : 1 : 1 и 3 : 1 : 2 получается бензин сортов *А* и *В* соответственно. Стоимость 1000 л бензина *А* равна 90 дол., бензина сорта *В* – 120 дол. Определить месячный план производства бензина сортов *А* и *В*, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

Построение математической модели. Пусть x_1, x_2 – количество (в 1000 л) бензина сортов *А* и *В*, производимое нефтеперерабатывающим заводом за месяц. Стоимость произведенного бензина при этом будет равна $f(x) = 90x_1 + 120x_2$, завод заинтересован в ее максимизации:

$$f(x) = 90x_1 + 120x_2 \to \max.$$

Каждый литр бензина сорта *А* получается при смешивании трех частей, одной из которых является алкилат, в x_1 тыс. л бензина *А* алкилата будет $\frac{1}{3}x_1$ тыс. л, в литре бензина сорта *В* условно шесть частей, три из которых составляет алкилат, поэтому в x_2 тыс. л бензина *B* алкилата будет $\frac{1}{2}x_2$ тыс. л. Всего за месяц завод получает 1500 тыс. л алкилата, поэтому должно быть выполнено неравенство

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1500.$$

Аналогично получаются неравенства, учитывающие ограниченность поставок крекинг-бензина и изопентана:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \le 1200,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le 1300.$$

Объемы производимой продукции не могут быть отрицательными. В итоге получаем следующую математическую модель рассматриваемой задачи:

$$f(x) = 90x_1 + 120x_2 \to \max,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1500,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \le 1200,$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le 1300,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Пример 3. Нефтяная компания «РТ» для улучшения эксплуатационных качеств и снижения точки замерзания дизельного топлива, которое она производит, добавляет в него определенные химикаты. В каждом бензобаке объемом 1000 л должно содержаться не менее 40 мг химической добавки *X*, не менее 14 мг химической добавки *Y* и не менее 18 мг химической добавки *Z*. Необходимые химические добавки в форме готовых смесей поставляют «РТ» две химические компании *A* и *B*. В нижеследующей таблице приведено содержание химических добавок в каждом продукте, поставляемом указанными компаниями.

Продукт	Химические добавки, мг / л		
	X	*Y*	*Z*
A	4	2	3
B	5	1	1

Стоимость продукта *A* – 1,50 у.е. за 1 л, а продукта *B* – 3,00 у.е. за 1 л.

Найти ассортиментный набор продуктов *A* и *B*, минимизирующий общую стоимость добавленных в топливо химикатов.

Пример 4. Фирма собирается производить новый лосьон после бритья, качество которого оценивается по трем показателям:

- очищающие свойства;
- дезинфицирующие свойства;
- раздражающее воздействие на кожу.

Каждый из этих показателей измеряется по линейной шкале от 0 до 100 ед. Лосьон должен иметь, по крайней мере, по 60 ед. очищающих и дезинфицирующих свойств, и при этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимально. Продукт является смесью трех компонентов – *A*, *B*, *C*, характеристики которых приведены ниже.

Компонент	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающее воздействие
A	90	30	70
B	65	85	50
C	45	70	10

Найти оптимальную смесь.

Пример 5. Фермер для кормления скота зимой использует смесь из сена и силоса. Содержание питательных веществ в сене и силосе, их суточная норма в рационе и стоимость 1 кг кормов отражены в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательного вещества в 1 кг корма		Норма питательных веществ
	Сено	Силос	
p_1	3	1	9
p_2	1	2	8
p_3	1	6	12
Стоимость 1 кг корма, р.	5	4	

Сколько килограммов сена и силоса надо взять для приготовления корма на одни сутки, чтобы он содержал все питательные вещества не меньше требуемой нормы и при этом был самым дешевым?

Пример 6. Нефтеперерабатывающий завод получает за плановый период четыре полуфабриката: 600 тыс. л алкилата, 316 тыс. л крекинг-бензина, 460 тыс. л бензина прямой перегонки и 200 тыс. л изопентана. В результате смешивания этих ингредиентов в пропорциях 2 : 3 : 1 : 5, 2 : 4 : 3 : 4, 5 : 1 : 6 : 2 и 7 : 1 : 3 : 2 получают бензин четырех сортов – B_1, B_2, B_3, B_4. Цена его реализации – соответственно 1350, 1400, 1600 и 1250 ден. ед. за 1000 л. Предположив, что реализация любого сорта специального бензина не вызовет затруднений, построить модель, на основе которой можно решить задачу продажи бензина разных сортов, максимизирующую суммарный доход от его реализации.

Пример 7. Компания импортирует красные вина трех марок: французское бургундское по цене 1,08 ф. ст. за бутылку в количестве 100 тыс. бутылок в год; французское бордо по цене 0,96 ф. ст. за бутылку в количестве 130 тыс. бутылок в год; испанское красное стоимостью 0,5 ф. ст. за бутылку в количестве 150 тыс. бутылок в год. Красные вина смешиваются для получения столовых вин трех марок.

Марка столового вина	Содержание красного вина, %		Цена 1 бутылки, ф. ст.
	не менее	не более	
«Божоле»	30 (бургундское)	50 (испанское)	1,96
«Нюи-Сент-Жорж»	60 (бургундское)	30 (испанское)	2,46
«Сент-Эмильон»	60 (бордо)	30 (испанское)	2,08

Максимизировать прибыль, если в год может быть продано не более 200 тыс. бутылок вина «Божоле» и не более 180 тыс. бутылок «Сент-Эмильон».

Пример 8. Компания поставляет фруктовые соки и напитки (смеси соков). Список продукции фирмы и цена за литр приведены в таблице

Напиток	Цена за 1 л, р.
Яблочный сок	40
Виноградный сок	42
Клюквенный сок	37
Яблочно-виноградный сок	40
Яблочно-клюквенный сок	39
Фруктовая смесь	42

Состав смесей: яблочно-виноградный сок – 70 % яблочного сока и 30 % виноградного сока; яблочно-клюквенный сок – 60 % яблочного сока и 40 % клюквенного сока; фруктовая смесь – 50 % яблочного сока, 20 % виноградного сока и остальное – клюквенный сок.

В настоящий момент на складе компании имеется 3000 л яблочного сока, 1900 л виноградного сока и 2500 л клюквенного сока. Менеджер хочет выяснить, сколько пакетов каждого напитка нужно выпустить, чтобы максимизировать прибыль. Себестоимость 1 л яблочного сока – 20 р., виноградного – 23 р., клюквенного – 18 р. Все напитки упакованы в стандартные пакеты емкостью 1 л.

Компания имеет заказ на 600 пакетов яблочного сока, 300 пакетов яблочно-виноградного сока и 1000 пакетов фруктовой смеси. Заказ должен быть выполнен в текущую поставку. Опыт показывает, что ни один из видов продукции не следует производить в количестве более чем 2000 пакетов.

1. Составьте план розлива, дающий наибольшую прибыль в сложившейся ситуации.

2. Получите отчет об устойчивости для найденного оптимального плана. Объясните, что означают приведенные стоимости для яблочного сока, яблочно-виноградного сока и для фруктовой смеси. Сколько пакетов яблочного и яб-

лочно-виноградного сока следовало бы произвести, если бы заказ на эти две позиции отсутствовал?

3. Допустим, что вы можете закупить дополнительные 300 л сока. Яблочный, виноградный или клюквенный сок вы предпочтете? Сколько дополнительной прибыли вы можете получить по сравнению с первоначальным планом?

Пример 9. Институт питания должен разработать рекомендации по оптимальному меню для школьных обедов. Основная задача состоит в том, чтобы при выполнении определенных требований к кулинарным достоинствам обедов обеспечить необходимое содержание некоторых важных веществ и при этом добиться минимально возможной для поставленных условий стоимости обедов.

Базовый состав продуктов, которые решено использовать для приготовления обедов исходя из их доступности в различных местностях, приведен в одной из следующих таблиц. В другой таблице приведены значения минимальных потребностей в некоторых веществах и калориях для старшеклассников в расчете на один обед.

Продовольствие	Цена за 1 кг, р.
Говядина	100
Масло	70
Хлеб	10
Морковь	30
Рыба	95
Яйца	105
Молоко	20
Сыр	100
Картофель	20

	Количество	Единицы
Калории	2000	ккал
Белки	70	г
Железо	10	мг
Кальций	800	мг
A	1,5	мг
B1	1	мг
B2	1,5	мг
PP	8	мг

Стандартное содержание веществ в 1 кг данных продуктов приводится в третьей таблице.

	Говядина	Масло	Хлеб	Морковь	Рыба	Яйца	Молоко	Сыр	Картофель
Калории	1 200	7 800	2 000	400	650	1 500	600	3 000	900
Белки	160		70		140	110	50	300	17
Железо	25		20						12
Кальций			250				1 200	8 000	100

	Говядина	Масло	Хлеб	Морковь	Рыба	Яйца	Молоко	Сыр	Картофель
A	0,1	6		90		7	0,5	2	
B_1	2,5		2,6						
B_2	2		1,3		2	8	1,9	4,5	0,5
PP	20		4,5		50	2			9

Отсутствие некоторых данных следует понимать как практическое отсутствие данного вещества в продукте. Исходя из того что в таблице учтены не все необходимые вещества и из некоторых других требований, при выборе составных частей обеда необходимо удовлетворить следующие условия:

- количество масла должно составлять от 20 до 30 г;
- расчетное количество хлеба не должно превышать 400 г;
- количество мяса и рыбы не должно быть меньше 50 г;
- количество яиц не должно быть меньше 20 г;
- количество картофеля не должно превысить 300 г.

Найдите состав продуктов, минимизирующий стоимость обеда, при соблюдении заданных ограничений. Сколько стоит обед?

1. Получите отчет об устойчивости. Как следует интерпретировать значение приведенной стоимости масла? Подтвердите ваш ответ расчетами.
2. Проанализируйте решение. Нет ли в нем, на ваш взгляд, некоторых несообразностей? Если есть, то какие?
3. Добавьте в задачу новые ограничения, которые должны, по вашему мнению, быть удовлетворены. Найдите решение задачи при новых ограничениях. Сколько стоит обед?
4. При какой минимальной массе исходных продуктов удается удовлетворить все ограничения? Какой при этом окажется стоимость обеда?

8.4. Задачи об оптимальном раскрое

Пример 1. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при заданном способе раскроя и величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры, приведены в таблице.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов, см^2	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

Пример 2. При изготовлении парников используется материал в виде металлических стержней длиной 220 см. Этот материал разрезается на стержни длиной 120, 100 и 70 см. Для выполнения заказа требуется изготовить 80 стержней длиной 120 см, 120 стержней длиной 100 см и 102 стержня длиной 70 см. Сколько существует рациональных способов раскроя? Какое минимальное количество материала следует разрезать, чтобы выполнить заказ?

8.5. Маркетинг. Задачи о рекламе

Пример 1. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000 дол. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 дол., а каждая минута телерекламы – в 100 дол. Фирма хотела бы использовать радиосеть по крайней мере в 2 раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на радио- и телерекламу.

Пример 2. Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевизора, радио, газет и рекламных плакатов. Маркетинговые исследования показали, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 5, 7 и 4 дол. в расчете на 1 дол., затраченный на рекламу. Распределение рекламного бюджета по различным средствам подчинено следующим ограничениям:

1. Полный бюджет не должен превосходить 500 000 дол.
2. Следует расходовать не более 40 % бюджета на телевидение и не более 20 % бюджета на рекламные щиты.
3. Вследствие привлекательности для молодежной части населения различных музыкальных каналов на радио по этой позиции следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

Сформулировать задачу распределения средств по различным источникам для получения максимальной прибыли от рекламы.

Пример 3. Некая региональная компания хочет, чтобы ее рекламные объявления достигли, по крайней мере, 1 млн человек. Она планирует провести рекламу через местное TV, радиостанции, почту, местные газеты и электронную почту. Маркетинговый отдел оценивает эффективность рекламы в различных каналах следующим образом.

	Местное TV	Радиостанции	Почта	Местные газеты	Электронная почта
Сравнительная эффективность	0,70	0,60	0,30	1,00	0,10

Таким образом, хотя местные студии TV имеют аудиторию в среднем 50 000 человек, рекламное воздействие получат только 50 000 · 0,7 = 35 000 человек.

В следующей таблице приведены данные о количестве объектов, на которых можно размещать рекламу, средней аудитории, которую охватывает данное СМИ или организация, и ценах на рекламную акцию.

	Местное TV	Радиостанция	Почта	Местные газеты	Электронная почта
Размер аудитории, чел.	50 000	25 000	20 000	15 000	100 000
Цена рекламы, дол.	600	200	250	280	300
Максимальное количество объектов	13	15	10	17	3

1. Какова минимальная стоимость рекламной кампании?
2. Сколько денег следует вложить в каждый канал рекламы?

Пример 4. Фирма «JL», производитель кетчупов и соусов, планирует увеличить расходы на рекламу с 1,4 млн до 2 млн дол. частично в связи с необходимостью ввести на рынок свой новый продукт – «JL Тако-соус» в дополнение к традиционным продуктам фирмы «JL Кетчуп» и «JL Спагетти-соус». В прошлом году фирма продвигала два этих продукта по отдельности, выделив один и тот же бюджет на каждый продукт. Из прошлого опыта известно, что каждый доллар, израсходованный на рекламу «JL Кетчупа», дает 4 дополнительно проданных бутылки, а каждый доллар, израсходованный на рекламу «JL Спагетти-соуса», увеличивает продажи на 3,2 бутылки. Фирма «JL» получает 0,30 дол. за каждую проданную «JL Кетчупа» и 0,5 дол. – за бутылку «JL Спагетти-соус» (исключая издержки, связанные с рекламой).

Поскольку «JL Тако-соус» – новый продукт, на начальной стадии фирма ожидает не более 0,10 дол. прибыли с бутылки, однако отдел маркетинга прогнозирует, что каждый вложенный в рекламу доллар должен увеличить продажи «JL Тако-соуса» на 11 бутылок.

Отдел маркетинга прогнозирует также увеличение объема продаж каждого продукта на 1,4 бутылки на каждый доллар, вложенный в рекламу всех трех продуктов фирмы.

Фирма «JL» желает максимизировать прибыль от рекламной кампании и заложить фундамент для будущих успешных продаж, придерживаясь следующих ограничений:

- не более 2 млн дол. на всю рекламу;
- не более 400 тыс. дол., но не менее 100 тыс. дол. на совместную рекламу всех трех продуктов;
- не менее 1 млн дол. на продвижение «JL Тако-соуса» или индивидуально, или в совместной рекламе;
- не менее 250 тыс. дол. на продвижение «JL Кетчупа» и не менее 750 тыс. дол. на «JL Тако-соуса»;
- не менее 250 тыс. дол. на продвижение «JL Спагетти-соуса»;
- израсходовать не менее чем в прошлом году на продвижение «JL Кетчупа» индивидуально или в совместной рекламе;
- израсходовать не менее чем в прошлом году на продвижение «JL Спагетти-соуса» индивидуально или в совместной рекламе;
- получить от рекламы не менее 7,5 млн проданных бутылок всех продуктов.

1. Распределите рекламный бюджет между четырьмя типами рекламных объявлений (индивидуальная реклама каждого продукта и совместная реклама всех продуктов фирмы). Какова будет прибыль от рекламной кампании в этом случае?
2. Каким может быть доход от каждого доллара, вложенного в рекламу сверх установленных 2 млн дол., при сохранении всех других ограничений?
3. Поскольку наименее определенными являются цифры дохода и увеличения продаж на один вложенный доллар для «JL Тако-соуса», определите, в каких пределах могут изменяться эти цифры без изменения оптимального плана и как при этом будет меняться прибыль. Прокомментируйте результат.
4. Как повлияет исключение ограничения на минимальный бюджет совместных рекламных объявлений? Как повлияет увеличение верхнего предела бюджета совместной рекламы на 100 тыс. дол.?
5. Как изменится прибыль, если снизить минимальную сумму, которую требуется израсходовать на индивидуальную рекламу «JL Тако-соуса», на 50 тыс. дол.?

Бизнес-кейсы

Корпорация «Фарма Лаб»

(задачу предложил Д.В. Щуров, менеджер по группе препаратов, представительство АО «Лаборатория Сервье», Франция) [12]

Фармацевтическая корпорация производит четыре продукта: M1, M2, M3, M4 и M5. Каждая проданная коробка M1 приносит компании 3,25 дол., M2 – 3,8 дол., M3 – 2,5 дол., M4 – 6,75 дол., M5 – 4,8 дол.

Недавно был выполнен новый анализ возможностей сбыта. Он показал, что если врача какого-либо медицинского учреждения региона посещает медицинский представитель компании, то этот врач выписывает в среднем вчетверо больше лекарственных препаратов, чем тот, с которым медицинский представитель не работал. Соответствующие средние количества выписываемых препаратов приведены в таблице.

Врачи	Количество выписываемых препаратов (упаковок) в расчете на одного врача в месяц				
	М1	М2	М3	М4	М5
Терапевты	8	8		8	4
Кардиологи				20	16
Педиатры	16		20		
Лоры	60	20			
Пульмонологи	4	56			

Врачей всех специальностей можно разделить на три категории по количеству выписываемых препаратов: врачи категории А (10 % общего количества) выписывают 40 % каждого из препаратов, врачи категории Б (30 % общего количества) выписывают еще 40 % препаратов, и остальные 20 % препаратов выписываются врачами категории В (60 % общего количества врачей).

Общее количество докторов в регионе показано в таблице.

Терапевты	6811
Кардиологи	900
Педиатры	4700
Лоры	1100
Пульмонологи	145

В настоящее время в регионе имеется 14 медицинских представителей, каждый из них способен сопроводить максимум 340 врачей.

Согласно стандартам компании, 20 % врачей, общающихся с медицинскими представителями, должны принадлежать к категории А, 60 % – к категории Б и 20 % – к категории В. Ежемесячные расходы на одного медицинского представителя – 30 тыс. дол.

В течение года запланировано продать 800 тыс. упаковок М1, 160 тыс. упаковок М2, 320 тыс. – М3, 720 тыс. – М4 и 160 тыс. – М5.

1. Сколько врачей каждой специальности и категории необходимо посещать медицинским представителям для достижения максимальной прибыли, если необходимо выполнить план по каждому из препаратов? Какого уровня продаж может ожидать корпорация в данном регионе?

2. Каково оптимальное количество медицинских представителей в регионе?

3. Является ли соотношение посещения врачей категории А, Б и В, принятое в корпорации, наилучшим? Можно ли сформулировать лучшее правило? Сколько докторов они должны посетить, чтобы получить максимальную прибыль?

Компания «Медиа Оптимизатор»

(задачу предложил Ю.А. Малинин, генеральный директор рекламного агентства «Media First») [12]

«Медиа Оптимизатор» – одна из ведущих мировых сетей рекламных агентств. В 50 странах, включая Россию, эта сеть осуществляет все медиапланирование и покупку рекламы у рекламодателей для компании «Супер женщина» мирового лидера в производстве женской спортивной одежды. Этот клиент чрезвычайно важен для агентства, поскольку вносит весомый вклад в оборот агентства и помогает производить впечатление на других потенциальных клиентов во время проведения тендеров.

В случае планирования и закупки рекламного времени на ТВ русский офис «Медиа Оптимизатор» имеет дело с двумя субконтракторами, имеющими статус «торговых домов по продаже рекламы» и эксклюзивные права на всю рекламу на российском ТВ:

- «Видео Интернешнл» – ОРТ, РТР, ТВ-6, Ren-TV и СТС;
- «НТВ Медиа» – НТВ и ТНТ.

При покупке рекламного времени «Медиа Оптимизатор» использует специальные единицы рекламного воздействия: GRP (Gross Rating Points) и TRP (Target Rating Points):

- 1 GRP – это время, необходимое для того, чтобы 1 % взрослой аудитории канала (мужчины и женщины старше 18 лет) хотя бы однажды увидели данное рекламное объявление;
- 1 TRP – это время, необходимое для того, чтобы 1 % целевой аудитории (в случае компании «Супер женщина» это женщины от 15 до 35 лет с высоким уровнем дохода) хотя бы однажды увидели данное рекламное объявление.

«Медиа Оптимизатор» покупает рекламное воздействие (измеряемое в единицах GRP) у торговых домов по продаже рекламы. Оба торговых дома жестко боролись за долю бюджета любого клиента и в конце концов договорились давать клиенту (или его агентству) максимальные скидки, если бюджет клиента разбивается в соотношении 70 % – «Видео Интернешнл», 30 % – «НТВ Медиа».

В свою очередь, своим клиентам (включая «Супер женщину») «Медиа Оптимизатор» продает рекламное воздействие, измеряемое в единицах TRP, – клиенты заинтересованы в том, чтобы рекламу увидел не абы кто, а именно целевая группа зрителей.

При выборе каналов компания руководствуется индексом привлекательности. Индексом привлекательности называется отношение целевой (для данного бренда) аудитории канала ко всей взрослой аудитории:

$$\text{Индекс привлекательности} = \frac{\text{количество } TRP}{\text{количество } GRP} \times 100.$$

Заказчики желают, чтобы для всей рекламной кампании этот индекс был как можно больше, во всяком случае, не меньше 100.

Полная стоимость 1 GRP, максимальные скидки и типичное значение индекса привлекательности (оцененное агентством для рекламы «Супер женщины») для каждого канала приведены в таблице.

Торговый дом	ТВ-канал	Полная стоимость 1 GRP, дол.	Скидка, %	Индекс привлекательности
«Видео Интернешнл»	ОРТ	1 500	0,35	75
	РТР	1 350	0,35	90
	ТВ-6	1 100	0,35	115
	СТС	1 000	0,35	135
	Ren-TV	1 000	0,35	105
«НТВ-Медиа»	НТВ	1 350	0,45	95
	ТНТ	900	0,45	125

«Супер женщина» – один из наиболее продвинутых клиентов агентства, поэтому еще более, чем индекс привлекательности, он ценит долю показов TRP на трех ведущих каналах: ОРТ, РТР и НТВ. Для каждой рекламной кампании он требует, чтобы эта доля была по крайней мере не меньше 70 % и вместе с тем чтобы «Медиа Оптимизатор» использовал все семь каналов, имея долю TRP для каждого из оставшихся четырех каналов не ниже 3 % от суммарной для рекламной кампании.

В прошлую пятницу в 17:30 директор по маркетингу «Супер женщины» позвонил заведующему отделом рекламы «Медиа Оптимизатор» в России и сказал, что главный офис «Супер женщины» готов вложить еще 500 тыс. дол. для усиления рекламной кампании в России при условии, что через полчаса (т.е. до окончания рабочего дня) российский офис «Медиа Оптимизатор» представит использования этого дополнительного бюджета. Разумеется, этот план должен удовлетворять всем обычным требованиям компании «Супер женщины».

Сколько GRP нужно было купить у каждого из семи каналов, чтобы удовлетворить всем требованиям заказчика? Каким будет общее количество TRP?

8.6. Задача об оптимальном размещении, хранении и перевозке товара

Пример 1. Предприятие оптовой торговли может реализовать T_j, $j=\overline{1,4}$ группы товаров. Для этого используется несколько видов ресурсов. Исходные данные для построения математической модели приведены в таблице.

Лимитирующие ресурсы и показатели	Товарная группа				Объем ресурса	Вид ограничения
	T_1	T_2	T_3	T_4		
Складские площади, м^2	12	20	10	12	65 000	$\le$
Трудовые ресурсы, чел.-ч	120	100	40	50	480 000	$\le$
Издержки обращения, ден. ед.	150	190	200	110	850 000	$\le$
Товарные запасы, ден. ед.	18	30	20	12	150 000	$\le$
План товарооборота, ден. ед.	120	90	130	60	500 000	$\ge$

Лимитирующие ресурсы и показатели	Товарная группа				Объем ресурса	Вид ограничения
	T_1	T_2	T_3	T_4		
Минимально допустимый план товарооборота по j-й группе, ед.	1 100	850	1 050	950		$\geq$
Прибыль, ден. ед.	50	70	20	80		

Требуется определить план хозяйственной деятельности торгового предприятия, обеспечивающий максимум прибыли при заданных ограничениях на складские площади, трудовые ресурсы, издержки обращения, товарные запасы, величину товарооборота, если торговая прибыль в расчете на единицу товарооборота j-й группы задана.

Пример 2. Требуется загрузить теплоход апельсинами и лимонами так, чтобы стоимость груза была максимальной. При этом известно, что объем грузового отсека теплохода составляет 1000 м^3; картонные коробки, в которых перевозятся апельсины и лимоны, имеют стандартные размеры: 50 × 50 × 40 см^3; стоимость одной коробки с апельсинами равна 45 дол.; с лимонами – 60 дол. Потребитель данной продукции заинтересован, чтобы апельсинов по сравнению с лимонами было доставлено больше по крайней мере в 1,5 раза.

Пример 3. Участнику экспедиции нужно решить, какие продукты положить в рюкзак, где осталось лишь 45 дм^3 объема, учитывая, что добавить к уже имеющемуся весу можно не более 35 кг. В его распоряжении имеются мясо, мука, сухое молоко и сахар. Врач экспедиции рекомендовал, чтобы мяса (по массе) было больше муки по крайней мере в два раза, муки не меньше молока, а молока по крайней мере в восемь раз больше, чем сахара. Сколько и каких продуктов следует положить в рюкзак, чтобы суммарная калорийность продуктов была наибольшей, если 1 кг мяса занимает место в объеме 1 дм^3 и содержит 1500 ккал; мука, соответственно, 1,5 дм^3 и 5000 ккал; молоко – 2 дм^3 и 5000 ккал и сахар – 1 дм^3 и 4000 ккал.

8.7. Планирование финансов

Пример 1. Менеджер международной банковской организации по инвестициям располагает 550 000 ф. ст., находящимися на счете банка, которые необходимо инвестировать, и рассматривает четыре типа инвестиций, а именно:

- тип 1: государственные ценные бумаги;
- тип 2: ценные бумаги корпораций:
- тип 3: обыкновенные акции отраслей сферы обслуживания;
- тип 4: обыкновенные акции отраслей производственной сферы.

Размер годовых процентов от инвестиций равен 8, 9, 10 и 12 % для 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типов соответственно. Денежные средства, не инвестированные по одному из указанных выше типов, остаются на банковском счете и приносят 4 % годовых.

Менеджер по инвестициям принял решение, что не менее 50 000 ф. ст. следует поместить в ценные бумаги корпораций, а в инвестиционные проекты с элементами риска (т.е. ценные бумаги корпораций и все виды обыкновенных акций) следует вложить не более 300 000 ф. ст. Кроме того, он считает, что по крайней мере половину всей суммы денежных средств, инвестированных с указанными выше типами инвестиций, следует вложить в обыкновенные акции, но в акции отраслей производственной сферы следует помесить не более одной четверти общей суммы инвестиций.

Построение математической модели. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – количество ф. ст., которые менеджер международной банковской организации намеревается вложить в государственные ценные бумаги, ценные бумаги корпораций, обыкновенные акции отраслей сферы обслуживания, обыкновенные акции отраслей производственной сферы и оставить на банковском счете соответственно.

Прибыль от такого распределения денежных средств с учетом перевода годовых процентов по инвестициям и банковскому вкладу в соответствующие доли составит

$$f(x) = 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}04x_5,$$

и менеджер желает ее максимизировать. Тогда цель в задаче моделируется следующим образом:

$$f(x) = 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}04x_5 \to \max.$$

Всего менеджер располагает 550 000 ф. ст.:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 550000,$$

из них не менее 50000 ф. ст. следует поместить в ценные бумаги корпораций:

$$x_2 \ge 50000.$$

В ценные бумаги корпораций и все виды обыкновенных акций следует вложить не более 300000 ф. ст.:

$$x_2 + x_3 + x_4 \le 300000.$$

Кроме того, по крайней мере половину всей суммы денежных средств, инвестированных в ценные бумаги корпораций и все виды обыкновенных акций, следует вложить в обыкновенные акции:

$$x_3 + x_4 \ge \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4),$$

но в акции отраслей производственной сферы следует помесить не более одной четверти общей суммы инвестиций:

$$x_4 \le \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Учтем, что по условиям суммы инвестиций и сумма вклада не могут быть отрицательными, получим следующую математическую модель задачи:

$$f(x) = 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}04x_5 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 550000,$$

$$x_2 \ge 50000,$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \le 300000,$$

$$x_3 + x_4 \ge \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4),$$

$$x_4 \le \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Пример 2. Клиент инвестиционной фирмы подал заявку на формирование портфеля акций на сумму в 100 000 р. Портфель должен включать акции трех компаний, характеристики которых приведены в таблице.

Компания	Цена акции, р.	Ожидаемый доход с акции, р.	Максимальный объем инвестиций, р.
A	60	7	60 000
B	25	3	25 000
C	20	3	30 000

Написать математическую модель задачи, по которой можно определить, сколько акций каждой компании должна приобрести фирма для своего клиента, чтобы максимизировать ожидаемый доход.

Построение математической модели. Пусть x_1, x_2, x_3 – количество акций компаний *A*, *B*, *C* соответственно, которое должна приобрести фирма.

Тогда стоимость приобретенных акций компании *A* будет $60x_1$, компании *B* – $25x_2$, компании *C* – $20x_3$. Ожидаемый доход от купленных акций составит $7x_1$ р., $3x_2$ р., $3x_3$ р. соответственно.

Из ограничений суммы на формирование портфеля в 100 000 р. следует неравенство

$$60x_1 + 25x_2 + 20x_3 \le 100000.$$

Чтобы стоимость акций каждой компании не превышала максимальный объем возможных инвестиций, введем ограничения:

$$60x_1 \le 60000 \text{ или } x_1 \le 1000,$$

$$25x_2 \le 25000 \text{ или } x_2 \le 1000,$$

$$20x_3 \le 60000 \text{ или } x_3 \le 1500.$$

Добавим к этому естественные ограничения $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

При этом суммарный ожидаемый доход составит $7x_1 + 3x_2 + 3x_3$. Таким образом, объединяя эти соотношения с учетом цели максимизации дохода, имеем модель задачи:

$$f(x) = 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$60x_1 + 25x_2 + 20x_3 \le 100000,$$
$$x_1 \le 1000,$$
$$x_2 \le 1000,$$
$$x_3 \le 1500,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Пример 3. Частный инвестор предлагает вложить 500 000 р. в различные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал три типа акций и два типа государственных облигаций. Часть денег предполагается положить на срочный вклад в банк.

Вложения	Доход, %	Риск
Акции A	15	Высокий
Акции B	12	Средний
Акции C	9	Низкий
Долгосрочные облигации	11	–
Краткосрочные облигации	8	–
Срочный вклад	6	–

Имея в виду качественные соображения диверсификации портфеля и не формализуемые личные предпочтения, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

1. Все 500 000 р. должны быть инвестированы.
2. По крайней мере 100 000 р. должны быть на срочном вкладе в банке.
3. Не меньше 25 % средств, инвестированных в акции, должны быть вложены в акции с низким риском.
4. В облигации нужно инвестировать по крайней мере столько же, сколько в акции.
5. Не более чем 125 000 р. должно быть вложено в бумаги с доходом менее 10 %.

Определить портфель бумаг инвестора, удовлетворяющий всем требованиям и максимизирующий годовой доход от вложенных денег.

Построение математической модели. Пусть x_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$ – средства, которые планируется вложить в акции A, B, C, долгосрочные и краткосрочные облигации и срочный вклад соответственно (тыс. р.). Тогда целевая функция, выражающая доход от вложенных инвестиций, строится следующим образом: если x_1 – вложенный капитал в акции A, то через год с учетом процентной ставки наращенная сумма составит $x_1 + 0{,}15x_1 = 1{,}15x_1$. Следовательно, доход от вложенных средств в акции A равен $0{,}15x_1$. Рассуждая аналогично для других вложений, суммарный доход формально можно записать так: $0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}9x_3 + \quad + 0{,}11x_4 + 0{,}8x_5 + 0{,}6x_6$. Именно его, по условию задачи, необходимо максимизировать. Ограничения на инвестиции согласно условию задачи и введенным обозначениям по проектам будут выглядеть следующим образом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500,$$
$$x_6 \geq 100,$$
$$0{,}25(x_1 + x_2 + x_3) \geq x_3,$$
$$x_4 + x_5 \geq x_1 + x_2 + x_3,$$
$$x_3 + x_5 \leq 125.$$

Согласно экономическому смыслу, на каждую переменную необходимо наложить условие неотрицательности: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$.

Объединяя все формализованные условия, получаем полную математическую модель задачи:

$$f(x) = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}9x_3 + 0{,}11x_4 + 0{,}8x_5 + 0{,}6x_6 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 500,$$
$$x_6 \geq 100,$$
$$0{,}25(x_1 + x_2 + x_3) \geq x_3,$$
$$x_4 + x_5 \geq x_1 + x_2 + x_3,$$
$$x_3 + x_5 \leq 125,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0.$$

Пример 4. Средства банка составляют 100 млн дол. Часть их, но не менее 35 млн дол., должна быть размещена в кредитах. Ценные бумаги должны составлять не менее 40 % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, но при этом банк собирается потратить на ценные бумаги не более 30 млн дол. Сколько средств банк должен вложить в кредиты и ценные бумаги для максимизации ожидаемой прибыли, если доходность кредитов равна 0,15, а доходность ценных бумаг – 0,1?

Пример 5. Правление банка сочло возможным инвестировать капитал суммой 300 тыс. дол. в шесть конкретных проектов. Эксперты оценили годовую эффективность каждого проекта на два года следующим образом:

Год	Номер проекта					
	1	2	3	4	5	6
1-й	0,12	0,14	0,15	0,10	0,18	0,25
2-й	0,10	0,10	0,12	0,18	0,12	0,15

Менеджер по инвестициям считает, что не стоит вкладывать в проект 5 более 40 тыс. дол., а в проекты 4 и 6 – более 25 % от общей денежной суммы ввиду высокой вероятности риска, соответствующего этим проектам. В то же время не менее 40 % денежных средств желательно поместить в проекты 1 и 2. Найдите план инвестиций в каждый проект с целью максимизации дохода, используя для его подсчета формулу сложных процентов.

Пример 6. Брокеру биржи клиент поручил разместить 100 000 дол. США на фондовом рынке, сформировать портфель с ценными бумагами, чтобы получить максимальные годовые проценты с вложенного капитала. Выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций – акций *A*, *B*, *C*, *D*, которые позволяют получить доход в размерах соответственно 6, 8, 10 и 9 % годовых от вложенной суммы.

При этом клиент поручил не менее половины инвестиций вложить в акции *A* и *B*. С целью обеспечения ликвидности не менее 25 % общей суммы капитала нужно поместить в акции *D*. Учитывая прогноз на изменение ситуации в будущем, в акции *C* можно вложить не более 20 % капитала. Специфика налогообложения указывает на необходимость вложения в акции *A* не менее 30 % капитала.

Определите распределение инвестиций капитала, обеспечивающее максимальный годовой процентный доход.

Пример 7. Компания получила предложение участвовать в двух одногодичных проектах. Ежеквартальные денежные потоки для этих проектов показаны в следующей таблице.

Проект	Объем денежных потоков на указанную дату, млн дол.				
	01.01.2008	01.04.2008	01.07.2008	01.010.2008	31.12.2008
1	– 1,0	– 3,1	– 1,5	1,8	5,0
2	– 3,0	– 2,5	1,5	1,8	2,8

Компания в начале каждого квартала может инвестировать 100 000 дол., а также взять заем на сумму, не превышающую 10 % совокупного годового дохода. Все займы должны быть возвращены в конце квартала. Прибавочные суммы могут приносить прибыль, равную 10 % годовых. Все суммы, аккумулированные в конце квартала, можно инвестировать в следующем квартале.

Сформулировать задачу линейного программирования, оптимизирующую размещение инвестиций.

Пример 8. Банк в течение нескольких месяцев планирует вложить до 200 тыс. дол. в кредитование частных лиц (клиентов) и покупок автомобилей. Банковские комиссионные составляют 14 % при кредитовании частных лиц и 12 % при кредитовании покупок автомобилей. Оба типа кредитов возвращаются в конце годичного кредитования. Известно, что около 3 % клиентских и 2 % автомобильных кредитов никогда не возвращаются. В рассматриваемом банке объемы кредитов на покупку автомобилей обычно более чем в два раза превышают объемы кредитов для других частных лиц.

Найти размещение средств банка по двум описанным видам кредитования, при котором доход банка в конце года был бы наибольшим.

Пример 9. Инвестиционная компания намерена инвестировать 100 млн р. Четыре возможных варианта вложения средств представлены в таблице.

Варианты инвестирования	Ожидаемый доход, %	Максимально возможная сумма инвестиций, млн р.
Обыкновенные акции	8	5
Облигации казначейства	6	7
Фонд денежного рынка	12	2
Муниципальные облигации	9	4

Компания также приняла решение, что не менее 30 % средств должно быть вложено в обыкновенные акции и долгосрочные облигации и не более 40 % – в фонды денежного рынка и муниципальные облигации.

Определить, сколько средств должна вложить инвестиционная компания, чтобы максимизировать доход в следующем году.

Пример 10. Вице-президенту банка были представлены предложения о шести проектах. Проект «Производство-1» должен принести банку прибыль 680 тыс. дол., проект «Производство-2» – 715 тыс. дол., проект «Розничная торговля-1» – 570 тыс. дол., проект «Розничная торговля-2» – 420 тыс. дол., проект «Оптовая торговля» – 525 тыс. дол. и проект «Реклама» – 1400 тыс. дол.

При рассмотрении этих предложений вице-президент должен принять во внимание потребность проектов в наличности и массу доступной наличности для соответствующих периодов.

Проект	Наличные потребности, тыс. дол.			
	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4
Производство-1	1 000	1 000	900	500
Производство-2	700	750	1 500	300
Розничная торговля-1	1 000	1 500	500	0
Розничная торговля-2	600	1200	0	0
Оптовая торговля	800	800	800	1100
Реклама	900	1 200	1 500	2 000

Доступная наличность – 4 млн дол. в течение периода 1; 4,5 млн дол. – в течение периода 2; 5 млн дол. – в течение периода 3 и 5,5 млн дол. – в течение периода 4.

1. Какие проекты следует финансировать и какое количество наличности необходимо в течение каждого периода, если цель состоит в том, чтобы макси-

мизировать прибыль? Считайте, что прибыль будет получена уже по истечении четвертого периода.

2. Банк может получить дополнительно 200 тыс. дол. в первом периоде и 1200 тыс. дол. во втором периоде, но это обойдется ему в 300 тыс. дол. Стоит ли воспользоваться этой возможностью?

Пример 11. Комитет планирования банка принимает ежемесячные решения относительно количества фондов, размещенных в государственных ценных бумагах. Одни ссуды, выдаваемые банком, защищены (обеспечены), другие являются необеспеченными. Список различных типов ссуд и их ежегодных процентных ставок показан в таблице.

Обеспеченные	
Жилищный залог	11
Коммерческий залог	12
Автомобиль	15
Ремонт дома	13
Необеспеченные	
Кредит	17
Учебный	10

Ежегодная ставка дохода по государственным ценным бумагам – 9 %. При принятии решения комитет должен руководствоваться некоторыми юридическими требованиями: количество средств, распределенных по обеспеченным ссудам, должно быть по крайней мере в 4 раза больше, чем по необеспеченным.

Авто- и ремонтные займы должны поглощать не больше 20 % всех обеспеченных ссуд.

Студенческие ссуды не должны быть меньше 30 % необеспеченных займов.

В государственные бумаги должно вкладываться не менее 10 % и не более 20 % доступных фондов.

Кредиты не должны превышать 10 % всех ссуд.

1. Каково оптимальное распределение фондов, если цель состоит в том, чтобы максимизировать ежегодный доход?

2. Какие виды ссуд не будут обеспечены фондами?

3. Допустим, что в следующем месяце ожидается большой спрос на все типы ссуд. Как нужно изменить ежегодные ставки, чтобы они привели к оптимальному распределению фондов? Будут ли в этом случае финансироваться все виды ссуд?

Пример 12. Компания имеет шесть различных возможностей вложить деньги. Каждая из возможностей требует определенных инвестиций в течение ряда лет (в таблице отрицательные значения) и после определенного срока приносит прибыль (положительные числа в таблице).

Год	Финансовые потоки, тыс. дол. в год					
	Проект А	Проект Б	Проект В	Проект Г	Проект Д	Проект Е
1-й	– 500	– 900	– 1 200	– 700	– 2 000	– 1 800
2-й	– 600	– 600	– 1 000	– 500	600	– 1 500
3-й	– 1 600	610	– 500	– 2 000	600	– 1 000
4-й	1 200	400	– 500	– 1 000	600	– 1 000
5-й	1 400	500	2 500	– 1 500	600	3 500
6-й	1 500	950	2 500	8 000	600	3 500

Компания хочет вложить капитал в те проекты, которые максимизируют суммарную для всех проектов чистую приведенную стоимость в расчете на шесть лет при ставке дисконта 5 % годовых.

Компания имеет инвестиционный бюджет, который не должен быть превышен для каждого года, а именно на первый год – не более 4,5 млн дол. инвестиций, на второй год – не более 2,5 млн дол. и на третий год – 2,2 млн дол., далее компания должна иметь положительный денежный поток по выбранным проектам.

Предполагается, что любой проект либо финансируется полностью, либо не финансируется совсем.

1. Выберите проекты, которые следует финансировать.

2. Представьте себе, что условия финансирования изменились и теперь можно финансировать любой проект либо полностью, либо на 50 %, либо не финансировать вовсе. Как изменится максимальная суммарная чистая приведенная стоимость?

3. Проанализируйте, как зависит результат в вариантах 1 и 2 от ставки дисконта (сравните ответы при ставке 0, 5, 10 и 15 %).

Замечание. Чистая приведенная стоимость инвестиций рассчитывается либо по стандартной формуле *Excel* (ЧПС(…) в русской версии или NPV(…) в английской версии), либо прямо по формуле (для шести лет):

$$\begin{matrix}\textit{Чистая приведенная} \\ \textit{стоимость}\end{matrix} = \frac{M_1}{r} + \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_3}{r^3} + \frac{M_4}{r^4} + \frac{M_5}{r^5} + \frac{M_6}{r^6},$$

где r = 105 % – коэффициент дисконтирования, а $M_1, \ldots, M_6$ – денежные потоки за каждый год из шести лет.

Пример 13. В таблице представлен список потенциальных инвестиций с указанием их важных характеристик. Следует иметь в виду, что акции и облигации «Бекман Inc.» – это две разные инвестиции.

Категория инвестиций	Инвестиции	Ожидаемый годовой доход, %	Фактор ликвидности	Фактор риска
Акции	«Бекман Inc.»	8,5	100	62
	«Тако Грандэ»	10,0	100	71
	«Калтон REIT»	10,5	100	78
	«Кьюб электроникс»	12,0	100	95

Категория инвестиций	Инвестиции	Ожидаемый годовой доход, %	Фактор ликвидности	Фактор риска
Облигации	«LA – Энергия»	5,8	95	19
	«Бекман Inc.»	6,3	92	33
	«Метро-Транзит»	7,2	79	23
Недвижимость	Квартиры внаем	9,0	0	50
Банк	Банковский вексель	4,6	80	0
	Фонд взаимного участия	5,2	100	10
	Срочный вклад	7,8	0	0

1. Составьте портфель инвестиций так, чтобы максимизировать ожидаемый годовой доход, учитывая выдвинутые инвестором требования:

- должно быть инвестировано точно 500 тыс. дол.;
- средневзвешенный фактор риска не должен превышать 55;
- средневзвешенный фактор ликвидности должен быть не ниже 85;
- не менее 10 тыс. дол. должны быть инвестированы в «Бекман Inc.»;
- от 20 до 50 % небанковских инвестиций должны быть вложены в каждую из возможных категорий;
- за исключением инвестиций банковской категории ни одна из инвестиций не должна превышать 20 %;
- не менее 25 тыс. дол. должно быть инвестировано в фонд взаимного участия;
- не менее 125 тыс. дол. должно быть вложено в акции;
- не более 40 % вложений с доходом менее 10 % могут иметь фактор риска, превышающий 25;
- не менее половины портфеля инвестиций должны быть полностью ликвидными (т.е. должны иметь фактор ликвидности 100).

2. Включите в отчет следующую информацию:

- ожидаемый годовой доход от портфеля;
- средневзвешенные факторы риска и ликвидности, а также сопоставление реальных сумм инвестиций по каждому из выставленных инвестором условий с установленными ограничениями;
- ожидаемый доход на каждый доллар, инвестированный сверх 500 тыс. дол.

3. Для каких инвестиций возможные ошибки в оценках ожидаемого дохода могут наиболее сильно сказаться на оптимальном портфеле?

4. Как повлияет на оптимальное решение ослабление условия об инвестировании в фонд взаимного участия не менее 25 тыс. дол.?

Бизнес-кейс

«Дом-строй»

(задачу предложил А.В. Мирошниченко, ведущий специалист ОАО «Корпорация «Жилищная инициатива») [12]

Строительная фирма «Дом-строй» запланировала построить в предстоящие 16 месяцев три жилых здания А, В и С площадью 10 000, 7500 и 12 000 м^2 соответственно. С учетом оптимальной загрузки собственных производственных ресурсов и имеющихся возможностей по аренде дополнительной техники был составлен производственный план строительства. В соответствии с ним объект А нужно начинать строить через месяц, объект В – в девятом месяце, а объект С – в четвертом месяце плана. Так как строящиеся квартиры можно продавать уже за месяц до начала строительства соответствующего дома, предполагается все деньги на строительство получить от предварительной продажи квартир. Плановые затраты на строительство приведены в таблице, где показано также, по какой цене за 1 м^2 могут быть проданы квартиры в каждый период строительства каждого дома.

Месяц	Объект А		Объект В		Объект С	
	Плановые затраты, дол.	Цена, дол. / м^2	Плановые затраты, дол.	Цена, дол. / м^2	Плановые затраты, дол.	Цена, дол. / м^2
1-й	0	450				
2-й	90 000	450				
3-й	135 000	460			0	540
4-й	180 000	470			129 600	540
5-й	270 000	480			194 400	550
6-й	720 000	490			259 200	560
7-й	675 000	505			712 800	570
8-й	675 000	520	0	380	712 800	580
9-й	540 000	535	114 000	390	712 800	590
10-й	540 000	550	256 500	400	712 800	605
11-й		565	456 000	415	712 800	615
12-й			456 000	430	648 000	625
13-й			427 500	445	648 000	635
14-й			427 500	460	518 400	645
15-й			370 500	475	518 400	655
16-й			342 000	490		

Разумеется, к концу строительства цена 1 м^2 жилья увеличивается, так что чем позже продать его, тем больше денег может быть получено. В связи с этим менеджер пытается составить такой план продаж, который, с одной стороны, обеспечил бы необходимые финансовые потоки, а с другой – позволил бы получить максимальную прибыль. Предварительные оценки, сделанные по типовой схеме продаж, показывают, что будет получено около 1,4 млн дол. прибыли.

1. Исходя из предположения, что в любом месяце строительства может быть продано любое количество площади данного дома, составьте оптимальный план продажи квартир, максимизирующий общую прибыль от реализации плана строительства. Учтите, что, кроме издержек по строительству, необходимо обеспечить наличие страхового запаса в размере 20 % общих сметных расходов в данном месяце. Сколько прибыли будет получено при реализации оптимального плана?

2. После кратковременной эйфории от успеха менеджер внимательно изучил полученный план и с огорчением обнаружил, что он излишне авантюрный. Судя по накопленной статистике, вряд ли удастся продавать больше 15 % площади за месяц, конечно, самого последнего, а невыполнение плана продаж сулит отрицательные финансовые потоки. Поэтому менеджер решил, что нужно предположить продажу более чем 10 % площади здания в месяц практически невозможной (кроме месяца сдачи) и составить новый, более реалистичный план продаж с учетом этого обстоятельства. Сколько прибыли теперь удастся получить от строительства?

3. В течение шести месяцев план строительства выполнялся полностью и продажи жилья шли строго по графику. Но в самом начале седьмого месяца рядом с объектом А, находящимся в зоне плотной застройки, произошла авария на теплоцентрали. В результате срочных и довольно масштабных работ по восстановлению, затеянных городскими властями, строительство дома пришлось приостановить на весь месяц. Из запланированных к продаже на этом объекте 1000 м^2 в результате отрицательного паблисити удалось продать только 200 м^2. Кроме того, простой обошелся в 45 тыс. дол., хотя из запланированных сумм ничего освоить не удалось. Таким образом, график строительства этого объекта сдвинулся на месяц. Несмотря на то, что ресурсы удалось перераспределить, в некоторых месяцах должен был возникнуть дефицит наличности, если не изменить план продаж. Составьте новый план продаж на оставшиеся восемь месяцев. На сколько сократилась ожидаемая прибыль?

8.8. Менеджмент. Задачи управления персоналом

Пример 1. Аудитории и лаборатории университета рассчитаны не более чем на 5000 студентов. Университет не принимает более 4000 студентов своей страны, но разрешает прием любого количества иностранных студентов. Преподавательский персонал университета составляет 440 человек. Для более эффективного обучения группы формируются из 12 студентов данной страны или из 10 иностранных студентов. Необходимо, чтобы 40 % студентов данной страны и 80 % иностранных могли разместиться в аудиториях, где имеется 2800 мест. Университет получает 2000 ден. ед. в год из правительственных средств на каждого студента своей страны и берет плату в размере 3000 ден. ед. в год за каждого иностранного студента.

Построить модель, на основе которой можно определить план приема студентов своей страны и иностранных студентов, а также сформировать группы для обучения, чтобы прибыль, полученная университетом, была максимальна.

Построение математической модели. В данной задаче удобней за искомые величины взять x_1 – число групп студентов своей страны и x_2 – число групп иностранных студентов. Тогда планируемое количество студентов своей страны и иностранных студентов будет выражаться соответственно как $12x_1$ и $10x_2$. Критерий задачи в виде получения наибольшей прибыли от приема студентов может быть записан следующим образом:

$$f(x) = 2000 \cdot 12x_1 + 3000 \cdot 10x_2 \to \max .$$

Два ограничения на прием студентов очевидны:

$$12x_1 + 10x_2 \le 5000 ,$$
$$x_1 \le 4000 .$$

Общее число групп студентов зависит от числа преподавателей:

$$x_1 + x_2 \le 440 .$$

Требование на размещение в аудиториях не более 2800 студентов записывается как неравенство

$$0{,}4 \cdot 12x_1 + 0{,}8 \cdot 10x_2 \le 2800 .$$

В совокупности все условия, записанные соответствующими соотношениями, составляют следующую модель задачи:

$$\begin{gathered} f(x) = 24000x_1 + 30000x_2 \to \max , \\ 12x_1 + 10x_2 \le 5000 , \\ x_1 \le 4000 , \\ x_1 + x_2 \le 440 \\ 4{,}8x_1 + 8x_2 \le 2800 , \\ x_1 \ge 0 ,\ x_2 \ge 0 , \\ x_1,\ x_2 \in Z . \end{gathered}$$

Пример 2. Ресторан работает семь дней в неделю. Официанты работают шесть часов в день. Договор с профсоюзом предусматривает, что каждый должен работать пять дней подряд, а затем два дня отдыхать. У всех официантов одинаковый еженедельный оклад. Требования штатного расписания представлены в таблице. Предполагая, что эти требования циклически повторяются, а также игнорируя тот факт, что число нанятых официантов должно быть целым, постройте модель линейного программирования, которая позволит руководству составить расписание, удовлетворяющее заданным требованиям при минимальных затратах.

День недели	Минимальное необходимое количество часов работы официантов
Понедельник	150
Вторник	200
Среда	400
Четверг	300
Пятница	700
Суббота	800
Воскресенье	300

Пример 3. Ресторан работает семь дней в неделю. По условиям найма официанты работают шесть часов в день. В ресторан приходят отдельные посетители и небольшие компании, их посещения будем называть *регулярным спросом.* Кроме того, более многочисленные группы (клубы по интересам и т.п.) иногда собираются в ресторане на свои еженедельные встречи.

По соглашению с профсоюзом официант работает пять дней подряд, а затем два дня отдыхает. Все официанты получают одинаковую недельную плату. Минимально необходимое ежедневное рабочее время зависит от регулярного ежедневного спроса, к которому добавлено количество рабочего времени, необходимого для облуживания запланированных на этот день крупных встреч. Регулярный спрос (выраженный в человеко-часах) и число встреч, запланированных на каждый день, представлены в таблице.

День недели	Регулярный спрос	Количество запланированных встреч
Понедельник	125	1
Вторник	200	0
Среда	350	1
Четверг	300	0
Пятница	650	3
Суббота	725	4
Воскресенье	250	2

Чтобы определить, сколько человеко-часов необходимо для обслуживания встреч, управляющий использует следующую таблицу.

Количество запланированных встреч	Требуемое количество человеко-часов
0	0
1	24
2	36
3	52
4	64
5	80

Необходимо составить расписание работы официантов, удовлетворяющее потребности в обслуживании и минимизирующее затраты, полагая, что данный цикл неограниченно повторяется.

Пример 4. Администрация компании Nemesis Company, осуществляя рационализаторскую программу корпорации, приняла решение о слиянии двух своих заводов в Аббатсфилде и Берчвуде. Предусматривается закрытие завода в Аббатсфилде и за счет этого – расширение производственных мощностей предприятия в Берчвуде. На настоящий момент распределение рабочих высокой и низкой квалификации, занятых на обоих заводах, является следующим.

Квалификация рабочих	Аббатсфилд	Берчвуд
Высокая	200	100
Низкая	300	200
Итого	500	300

В то же время после слияния завод в Берчвуде должен насчитывать 240 рабочих высокой и 320 рабочих низкой квалификации. После проведения всесторонних переговоров с привлечением руководителей профсоюзов были выработаны следующие финансовые соглашения. Все рабочие, которые попали под сокращение штатов, получат выходные пособия следующих размеров:

- квалифицированные рабочие – 2000 ф. ст.;
- неквалифицированные рабочие – 1500 ф. ст.;
- рабочие завода в Аббатсфилде, которые должны будут переехать, получат пособие по переезду в размере 2000 ф. ст.

Во избежание каких-либо преимуществ для рабочих Берчвудского завода доля бывших рабочих завода в Аббатсфилде на новом предприятии должна совпадать с долей бывших рабочих Берчвудского завода.

Требуется определить, как осуществить выбор работников нового предприятия из числа рабочих двух бывших заводов таким образом, чтобы минимизировать общие издержки, связанные с увольнением и переменой места жительства части рабочих.

Пример 5. Турфирма организует чартерный тур на курорт. В стоимость путевки входят стоимость авиаперелета «туда и обратно», плата за проживание в отеле, питание и экскурсии. В зависимости от предоставляемого сервиса туры подразделяются на три категории: *A* – люкс, *B* – стандарт и *C* – экономический. Цены путевок и издержки фирмы на одного клиента приведены в таблице.

Категория тура	Цена путевки, дол.	Стоимость номера в отеле, дол.	Питание и услуги, дол.
A	1 000	300	475
B	700	220	250
C	650	190	220

Фирме требуется решить, какое количество путевок каждой из категорий предложить клиентам с тем, чтобы максимизировать свою прибыль.

При этом нужно учитывать следующее:

- фрахт самолета обходится в фирме в 20 000 дол.;
- планируется реализовать 200 путевок;
- путевок категории *A* должно быть не менее 10 %;
- путевок категории *B* должно быть не менее 35 %, но не более 70 %;
- путевок категории *C* должно быть не менее 30 %;
- администрация отеля поставила условие – не менее 120 путевок должны быть категории *A* и *B*.

Пример 6. Туристская фирма располагает флотилией из трех типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатель	Судно		
	«Буревестник»	«Альбатрос»	«Чайка»
Пассажировместимость, чел.	2 500	2 000	1 000
Расход горючего, т	20 000	12 000	7 000
Экипаж, чел.	350	250	100
Затраты на содержание, тыс. р.	150	80	50
Цена путевки, тыс. р.	20	18	15

На круиз выделяется 70 000 т горючего. Наличие рабочей силы не превышает 1350 человек, затраты на содержание флота не должны превышать 450 тыс. р.

Сколько судов каждого типа надо отправлять в круиз, чтобы обеспечить максимальную прибыль?

8.9. Задачи городского и земельного кадастра

Пример 1. Застройщик, получив участок площадью 100 га, планирует его застройку коттеджами, многоэтажными жилыми зданиями, магазинами, АЗС, складами и другими вспомогательными зданиями с целью получения максимального дохода от сдачи помещений и зданий различного вида в аренду. Определены удельные характеристики по видам застройки.

Удельные характеристики	Виды застройки				
	Жилые многоэтажки	Коттеджи	Магазины	Склады	АЗС
Трудовые затраты, чел.-дн. / м^2	1,2	1,5	1,3	1	1,1
Финансовые затраты, тыс. р. / м^2	2	2,5	1,5	1,1	1,4
Чистый доход от аренды, тыс. р. / м^2	1,1	0,9	2,5	3,5	6

Финансовые ресурсы застройщика составляют 2 000 000 тыс. р. Трудовые ресурсы застройщика составляют 1 250 000 человеко-дней.

Введены ограничения по площадям земель, отводимых под застройку участка различными видами помещений и зданий. Так, площадь под коттеджами не должна превышать 30 % площади под многоэтажными жилыми зданиями; площадь под магазинами не должна превышать 10 % площади под многоэтажными жилыми зданиями; площадь складов и других вспомогательных зданий не должна превышать 25 % площади под магазинами; площадь под АЗС не должна превышать 5 % площади под многоэтажными жилыми зданиями.

Необходимо найти оптимальное сочетание различных видов застройки при ограничениях по трудовым, финансовым ресурсам и по площадям земель под застройку.

Пример 2. Комитет по градостроительству принял решение построить в течение трех месяцев в трех районах города 8000 м^2 муниципального социального жилья. Для застройки приглашены три строительные организации. Стоимость 1 м^2 социального жилья по районам у каждой строительной организации составляет:

Организация	1-й район	2-й район	3-й район
1-я	12 000 р. / м^2	12 900 р. / м^2	13 500 р. / м^2
2-я	11 200 р. / м^2	13 000 р. / м^2	14 000 р. / м^2
3-я	13 000 р. / м^2	12 500 р. / м^2	12 000 р. / м^2

Первая строительная организация за три месяца может построить 1000 м^2 жилья, вторая организация – 3200 м^2 жилья, третья организация – 4300 м^2. На сколько квадратных метров жилья выдать заказ каждой организации, чтобы общая стоимость застройки города была минимальной?

Пример 3. Городское хозяйство имеет в собственности три участка земли, находящиеся в сельскохозяйственном обороте. Из городского бюджета выделяется 4,44 млн р. для перевода земель сельскохозяйственного назначения в городской кадастр в течение трех лет. В первый год планируется провести земельно-кадастровые работы по переводу земель сельскохозяйственного назначения в городской кадастр на сумму 1,85 млн р., во второй – на сумму 1,65 млн р. и в третий – на оставшиеся средства.

Определить оптимальную структуру выводимых из сельскохозяйственного оборота земель в течение первого и второго года, если:

- площадь первого участка составляет 10 га, площадь второго – 8 га, площадь третьего – 15 га;
- стоимость проведения земельно-кадастровых работ на 1 га земли на первом участке составит 100 тыс. р., на втором – 130 тыс. р., на третьем – 160 тыс. р.;

• доходы по участкам до и после перевода земель в городской кадастр следующие:

Участок	Доход с 1 га в год *до* перевода земель в городской кадастр, тыс. р. / га	Доход с 1 $м^2$ в год *после* перевода земель в городской кадастр, тыс. р. / $м^2$
1-й	180	32
2-й	190	33
3-й	170	33

Пример 4. Площадь территории, выделенной для застройки. составляет 15 000 $м^2$ (1,5 га). По нормативам не менее 10 % территории должно быть засажено деревьями. Имеется два типа деревьев. Стоимость саженца дерева первого типа – 14 р., дерева второго типа – 10 р. Известно, что первый тип дерева выделяет на 5 % больше кислорода, чем второй. На одно дерево по нормативам отводится 2 $м^2$. На озеленение территории выделяется 7500 р. Составить оптимальный план землеустроительных работ по озеленению территории, выделенной для застройки. Определить, сколько деревьев первого и второго типа нужно посадить, чтобы объем кислорода, выделяемого деревьями, был максимальным.

Пример 5. Площадь территории, выделенной для застройки, составляет 100 000 $м^2$. Застройка территории планируется жилыми многоэтажными зданиями и жилыми коттеджами. Стоимость землеустроительных и земельно-кадастровых работ на участках под жилые многоэтажные здания – 125 р. / $м^2$. Стоимость землеустроительных и земельно-кадастровых работ под жилые коттеджи – 113 р. / $м^2$. Для землеустроительных и земельно-кадастровых работ на участках территории выделено 11 300 000 р. Налоговые поступления в год с 1 $м^2$ участков под жилые многоэтажные здания – 1 р., а с 1 $м^2$ участков под жилые коттеджи – 0,5 р. Предполагаемый спрос на выделенные для застройки территории под жилые многоэтажные здания составит не более 65 000 $м^2$. Составить оптимальный план распределения площади земли территории под застройку жилыми многоэтажными зданиями и жилыми коттеджами, чтобы объем налоговых поступлений за год был максимальным.

Пример 6. На территории дворов жилого микрорайона имеется 6 га свободной земли. На благоустройство свободных дворовых земель микрорайона выделено 6 млн р. Жилищное управление свободные участки земли предлагает благоустроить:

- детскими площадками;
- площадками для сушки белья;
- зелеными насаждениями (деревья, кустарники, цветы, газоны);
- площадками для выгула домашних животных;
- пешеходным плиточным покрытием;
- министадионами;

- площадками для отдыха молодежи и взрослого населения.

По результатам анализа нормативной документации, опроса экспертов и населения установлены коэффициенты важности (ценности, привлекательности) предлагаемых вариантов благоустройства:

Детская площадка	1,6
Площадка для сушки белья	1,4
Зеленые насаждения	1,5
Площадка для выгула домашних животных	1,1
Пешеходное плиточное покрытие	1,8
Министадион	1,3
Площадка для отдыха молодежи и взрослого населения	1,7

Потребность в финансовых средствах на 1 м^2 по вариантам благоустройства составляет:

Детская площадка	500 р. / м^2
Площадка для сушки белья	100 р. / м^2
Зеленые насаждения	25 р. / м^2
Площадка для выгула домашних животных	130 р. / м^2
Пешеходное плиточное покрытие	275 р. / м^2
Министадион	900 р. / м^2
Площадка для отдыха молодежи и взрослого населения	250 р. / м^2

Потребности в площадях земли на проектную единицу по вариантам благоустройства составляют:

Детская площадка	65 м^2
Площадка для сушки белья	15 м^2
Зеленые насаждения	65 м^2
Площадка для выгула домашних животных	35 м^2
Пешеходное плиточное покрытие	200 м^2
Министадион	140 м^2
Площадка для отдыха молодежи и взрослого населения	45 м^2

Определить оптимальную структуру вариантов благоустройства дворовой территории.

Список использованной и рекомендуемой литературы

1. Аксенюшкина Е.В. Математика-2: Нелинейное и линейное программирование : учеб. пособие / Е.В. Аксенюшкина, Н.В. Тарасенко, С.В. Тимофеев. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009.
2. Афанасьев М.Ю. Прикладные задачи исследования операций : учеб. пособие / М.Ю. Афанасьев, К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М. : ИНФРА-М, 2006.
3. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М. : ИНФРА-М, 2003.
4. Балдин К.В. Математические методы и модели в экономике : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М. : Флинта, 2012.
5. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2001.
6. Гаврилец Ю.Н. Целевые функции социально-экономического планирования / Ю.Н. Гаврилец. – М. : Наука, 1983.
7. Гармаш А.Н. Математические методы в управлении : учеб. пособие / А.Н. Гармаш, И.В. Орлова. – М. : Вуз. учеб. : ИНФРА-М, 2013.
8. Глухов В.В. Математические методы и модели в менеджменте / В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко. – СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2000.
9. Горчаков А.А. Компьютерные экономико-математические модели : учеб. пособие / А.А. Горчаков, И.В. Орлова. – М. : ЮНИТИ, 1995.
10. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования : учеб. пособие / А.А. Грешилов. – М. : Логос, 2006.
11. Дубров А.М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе : учеб. пособие / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев. – М. : Финансы и статистика, 2000.
12. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы / М.Г. Зайцев, С.Е. Варюхин. – М. : Дело, 2011.
13. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: компьютерно-ориентированный подход / М.Г. Зайцев. – М. : Дело АНХ, 2008.
14. Замков О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М. : Дело и Сервис, 2009.
15. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике / Ю.П. Иванилов. – М. : Наука, 1999.
16. Ильченко А.Н. Экономико-математические методы / А.Н. Ильченко. – М. : Финансы и статистика, 2006.
17. Карасев А.И. Математические методы и модели в планировании : учеб. пособие / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева. – М. : Экономика, 1987.
18. Колемаев В.А. Математические методы и модели исследования операций / В.А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ, 2008.
19. Компьютерное моделирование менеджмента : учеб. пособие / А.Ф. Горшков [и др.] ; под ред. Н.П. Тихомирова. – М. : Экзамен, 2007.

20. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М. : Изд-во «Юрайт» : ИД Юрайт, 2010.
21. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов / В.В. Лебедев. – М. : Изограф, 1997.
22. Левин М.И. Математическое моделирование экономического взаимодействия / М.И. Левин, В.Л. Макаров, А.М. Рубинов. – М. : Физматлит, 1993.
23. Логинов В.Н. Управленческие решения: модели и методы / В.Н. Логинов. – М. : Альфа-Пресс, 2011.
24. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В. Лотов. – М. : Наука, 1984.
25. Мадера А.Г. Моделирование и принятие решений в менеджменте: Руководство для будущих топ-менеджеров / А.Г. Мадера. – М. : Изд-во ЛКИ, 2012.
26. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / под ред. С.И. Макарова. – М. : КНОРУС, 2009.
27. Методы оптимальных решений в экономике и финансах : учебник / И.А. Александрова [и др.] ; под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. – М. : КНОРУС, 2010.
28. Мур Дж.Х. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Джеффри Х. Мур и др. – М. : Вильямс, 2004.
29. Неймарк Ю.И. Простые математические модели и их роль в постижении мира / Ю.И. Неймарк // Соровский образовательный журнал. – 1997. – № 3. – С. 139–143.
30. Новик И.Б. О философских вопросах кибернетического моделирования / И.Б. Новик. – М. : Знание, 1964.
31. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel: практикум / И.В. Орлова. – М. : Финстатинформ, 2000.
32. Пинегина М.В. Экономико-математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / М.В. Пинегина. – М. : Экзамен, 2002.
33. Попов А.М. Экономико-математические методы и модели : учеб. для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников. – М. : Юрайт, 2011.
34. Просветов Г.И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения / Г.И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2008.
35. Просветов Г.И. Анализ данных с помощью Excel: задачи и решения / Г.И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2015.
36. Решение экономических задач на компьютере : учеб. пособие / А.В. Каплан [и др.]. – М. : ДМК Пресс, 2008.
37. Савиных В.Н. Математическое моделирование производственного и финансового менеджмента : учеб. пособие / В.Н. Савиных. – М. : КНОРУС, 2012.
38. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel / О.Н. Салманов. – СПб. : БХВ – Петербург, 2003.

39. Солянкин А.А. Компьютеризация финансового анализа и прогнозирования в банке / А.А. Солянкин. – М. : Финстатинформ, 1998.

40. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. – М. : Вильямс, 2005.

41. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте / В.М. Трояновский. – М. : Изд-во РДЛ, 2002.

42. Урубков А.Р. Методы и модели оптимизации управленческих решений : учеб. пособие / А.Р. Урубков, И.В. Федотов. – М. : Дело, 2012.

43. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. для бакалавров / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, И.В. Орлова. – М. : Юрайт, 2012.

44. Федосеев В.В. Экономико-математические модели и прогнозирование рынка труда : учеб. пособие / В.В. Федосеев. – М. : Вуз. учеб., 2010.

45. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге : учеб. пособие / В.В. Федосеев, Н.Д. Эриашвили. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001.

46. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности / Г.П. Фомин. – М. : Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2009.

47. Хачатрян С.Р. Методы и модели решения экономических задач : учеб. пособие / С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. – М. : Экзамен, 2005.

48. Шелехова Л.В. Методы оптимальных решений : учеб. пособие / Л.В. Шелехова. – СПб. : Лань, 2016.

49. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе / С.И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

Учебное издание

Никифорова Ирина Аркадьевна
Аксенюшкина Елена Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ: КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

В двух частях

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 31.03.17.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
http://bgu.ru.