Т.И. Белых, А.В. Бурдуковская

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

ЧАСТЬ VIII

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Байкальский государственный университет

Т.И. Белых, А.В. Бурдуковская

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

ЧАСТЬ VIII

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Иркутск
Издательство БГУ
2017

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я 7
Б43

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Боровский
канд. техн. наук, доц. Т.И. Ведерникова

Белых Т.И.
Б43 Математика в экономике. Ч. 8 : Теория функций многих переменных [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Т.И. Белых, А.В. Бурдуковская. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2017. – 103 с. – Режим доступа: http://lib-catalog.isea.ru.

В учебном пособии в доступной форме приводятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы) из теории функций нескольких переменных, а также подробно разбираются типовые задачи и примеры.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения всех специальностей, может быть использовано как развернутый справочник для успешного усвоения данного раздела курса математики, систематизации и углубления знаний по теории функций многих переменных, привития навыков решения различных классов задач.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я 7

Оглавление

Введение

Многие задачи требуют при своем решении умения обращаться с функциями, которые зависят не от одной, а от многих переменных.

Теория функций многих переменных, базирующаяся на тех же положениях, что и теория функций одной переменной, однако требует более сложных умозаключений и развитого пространственного воображения. Например, метод сечений позволяет проанализировать поведение функции многих переменных и выявить её характерные особенности методами, аналогичными тем, которые применяются в дифференциальном исчислении функции одной переменной. Однако для этого необходимо ввести понятие производных по отдельным переменным, называемых частными производными и, соответственно, частных дифференциалов.

В пособии дается определение функции многих переменных, её предела и непрерывности, рассматриваются основные вопросы дифференциального исчисления функций многих переменных: понятие частных производных, частного и полного дифференциалов, уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, дифференцирования неявных и сложных функций многих переменных, первообразной. Особое внимание уделено теме экстремума функции многих переменных, в рамках которой рассматриваются вопросы необходимости и достаточности существования экстремума, понятие наибольшего, наименьшего значения и условного экстремума функции многих переменных. Заканчивается пособие приложениями экстремума: понятиями производной по направлению, градиента и методом наименьших квадратов.

Все темы пособия иллюстрированы большим количеством рисунков и примерами. В конце предлагаются варианты заданий для самостоятельной работы. Задания охватывают наиболее важные темы, рассмотренные в пособии.

1. Понятие функции двух переменных

В курсе дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной $y = f(x)$ рассматривается простейшая ситуация, в которой величина y зависит только от значений величины x. Однако в большинстве практических задач мы имеем дело с функциями, зависящими от нескольких переменных. Например, площадь прямоугольника зависит от двух параметров – длины и ширины, уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона) есть функция, связывающая давление газа с его объемом и температурой и т.д.

Ограничимся рассмотрением функций двух и трех независимых переменных, так как в этом случае возможна геометрическая или физическая интерпретация полученных результатов, а обобщение на случай большего количества переменных не вызывает принципиальных трудностей.

Определение 1. Пусть имеются две независимые переменные x и y, которые могут принимать различные значения независимо друг от друга. Каждой паре значений x и y соответствует точка на плоскости OXY. Обозначим некоторое множество точек на плоскости OXY через D, $(x,y) \in D$. Множество D называется областью определения функции, то есть областью, где $f(x,y)$ имеет смысл.

Обычно область D является некоторой частью плоскости OXY, ограниченной одной, или несколькими линиями, например: $x^2 + y^2 \leq R^2$ (рис. 1).

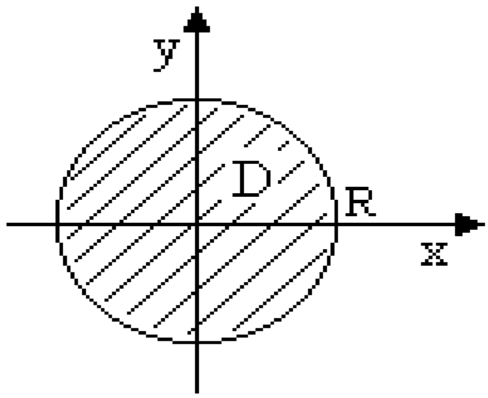


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация области определения

Определение 2. Величина $z = f(x,y)$ называется функцией переменных x и y на множестве D, если каждой точке этого множества (x,y) поставлено в однозначное соответствие определенное значение величины z.

Это определение однозначной функции. Для многозначных функций устанавливается соответствие между ветвями функции. Геометрически однозначная функция $z = f(x,y)$ представляет собой поверхность в пространстве (рис. 2).

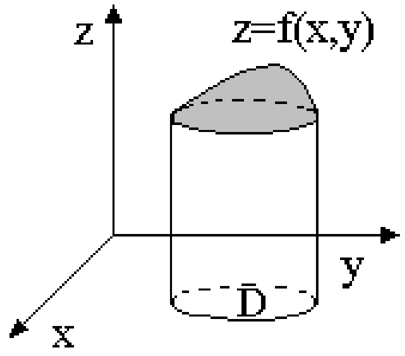


Рис. 2. Геометрическая интерпретация однозначной функции

1.1. Способы задания функций многих переменных

1. Табличный (например, для функции $z = x^2 + y^2$):

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	1	2	3	4	5	6	7
z	0	2	8	18	32	50	72	98

2. Аналитический:
$F(x, y, z) = 0$ (неявное задание);
$z = f(x, y)$ (явное задание);

3. Графический (рис. 3):

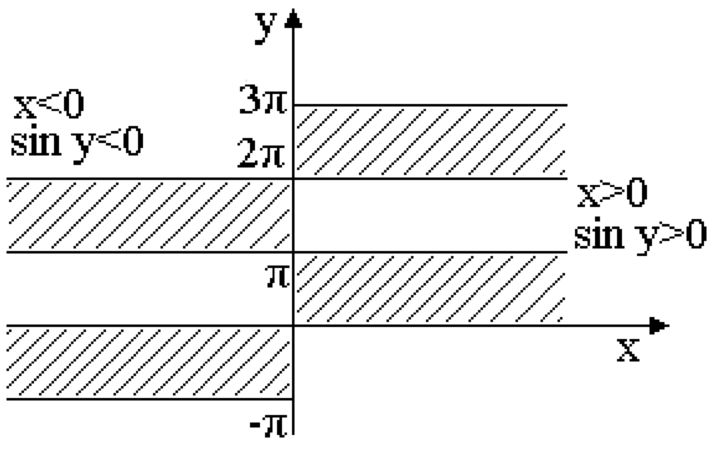


Рис. 3. Графический способ задания функции

Пример 1: Найти область определения функции $z = \sqrt{x \cdot \sin y}$. Из рис. 3 видно, что искомая область представляет собой горизонтальные полосы высотой π, бесконечные по оси x (x>0, x<0).

Определение 3. *Линией уровня* функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, в которых значение функции одно и то же и равно C.

Примерами линий уровня являются параллели и меридианы на глобусе – это линии уровня функций широты и долготы, синоптики публикуют карты с изображением изотерм – линий уровня температуры.

1.2. Предел и непрерывность функций многих переменных

Пусть имеется функция $z = f(x, y)$ и наша задача – построить ее график и провести полное исследование, используя по возможности методы, применяемые при исследовании функции одной переменной. Для этого применим метод сечений, суть которого в следующем.

Зафиксируем одну из переменных, например положим $y=y_0$, тогда функция $z = f(x, y_0)$ – есть функция одной переменной и представляет собой уравнение линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y=y_0$. Применим для этой линии методы дифференциального исчисления функции одной переменной. Затем переменной y придадим следующее значение $y=y_1$ и вновь проведем исследование функции $z = f(x, y_1)$. Так продолжаем до тех пор, пока не просмотрим всю поверхность $z = f(x, y)$, в результате чего получим достаточно подробное представление поверхности (рис. 4).

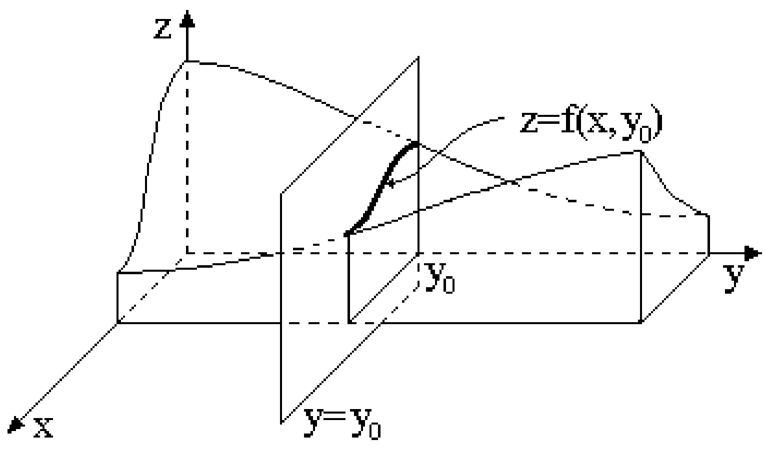


Рис. 4. Геометрическая интерпретация поверхности

Так как переменные x и y в уравнении $z = f(x, y)$ равноправны, то можно фиксировать x: $x = x_0$, $x = x_1$, … , $x = x_n$, и исследовать функции $z = f(x_i, y)$, ($i = 1,\ldots,n$) как функции одной переменной.

Зафиксируем значение функции $z = z_0$. Тогда уравнение $f(x, y) = z_0$ есть сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $z = z_0$ (рис. 5).

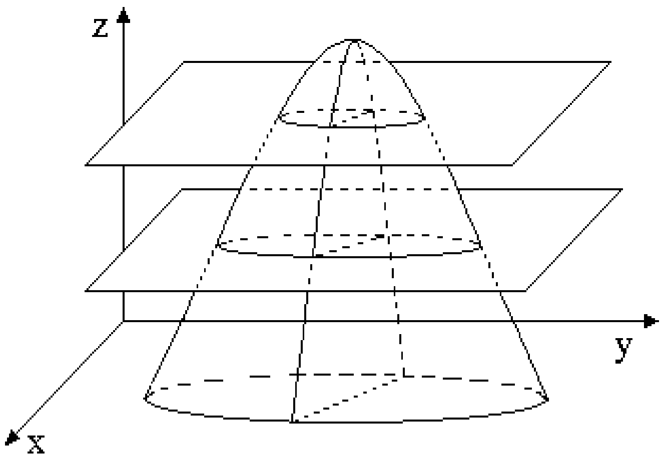


Рис. 5. Геометрическая интерпретация сечения поверхности плоскостями

Очевидно, что с помощью сечения можно ввести понятие предела функции многих переменных по аналогии с определением предела функции одной переменной.

Определение 4. Число А называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при стремлении независимых переменных $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для всех значений x и y, достаточно мало отличающихся от чисел x_0 и y_0, соответствующее значение $z = f(x, y)$ сколь угодно мало отличается от числа А.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A, \tag{1}$$

или на языке бесконечно малых: для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, для которых выполняются неравенства $|x - x_0| < \varepsilon$ и $|y - y_0| < \eta$, найдется такое $\delta > 0$, для которого справедливо неравенство $|z - A| < \delta$ (рис. 6).

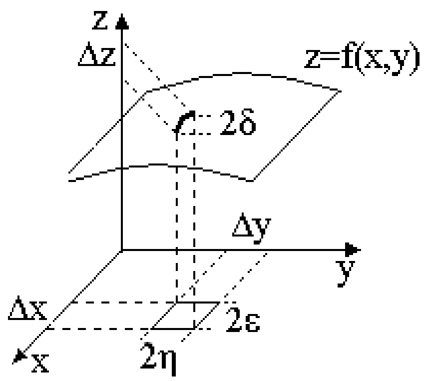


Рис. 6. Геометрическая интерпретация предела функции

Используя определение предела, можно ввести понятие непрерывности функции многих переменных.

Определение 5. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M(x_0, y_0)$, если она определена в этой точке и ее окрестности и предел приращения функции равен нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta z = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \equiv z_0,$$

где $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента x; $\Delta y = y - y_0$ – приращение аргумента y; $\Delta z = z - z_0$ – приращение функции $z = f(x, y)$.

Определение 6. Функция, непрерывная в каждой точке области *D*, называется *непрерывной в этой области*. Геометрически график непрерывной функции представляет собой сплошную поверхность без разрывов.

Аналогично функции одной переменной, можно ввести понятие разрывов для функции многих переменных.

Определение 7. Точки, в которых нарушено хотя бы одно из условий непрерывности, называются *точками разрыва функции многих переменных*. Совокупность точек разрыва может образовывать линию разрыва.

Если на линии разрыва образуется «ступенька», то есть односторонние пределы существуют, но не равны друг другу, то имеем разрыв I-го рода. Если же хотя бы один из односторонних пределов на линии разрыва не существует, или равен бесконечности, то имеем разрыв II-го рода.

Пример 2. Рассмотрим функции:

1. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ – имеет одну точку разрыва II-го рода $x = 0, y = 0$ (рис. 7)

2. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - R^2}$ – точки разрыва II-го рода объединяются в линию разрыва $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 8)

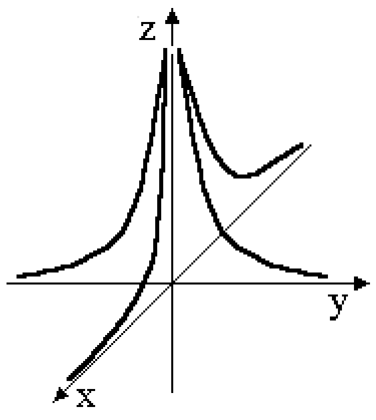


Рис. 7. Геометрическая интерпретация функции, имеющей одну точку разрыва II рода

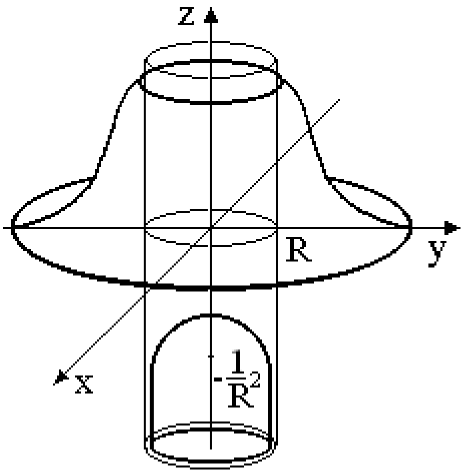


Рис. 8. Геометрическая интерпретация функции,
у которой точки разрыва II рода образуют линию

1.3. Частные производные функций многих переменных

По аналогии с функцией одной переменной рассмотрим производные и дифференциалы функции многих переменных.

Применим метод сечений, то есть зафиксируем одну из переменных, например $y = y_0$.

Определение 8. *Частной производной функции нескольких переменных* по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Частной производной по переменной x от функции двух переменных $z = f(x, y)$ называют функцию двух же переменных, получившуюся дифференцированием исходной функции по переменной x в предположении, что другая независимая переменная y является константой:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}. \tag{4}$$

Пример 3. Найти частные производные от функций:

1) $z = 5xy - (x^3 + y^3)$; 2) $z = x\cos y + \sin(x + y)$.

Решение. При вычислении частных производных фактически мы имеем дело с функцией одной переменной и, следовательно, можем применять соответствующие правила дифференцирования и таблицу производных, помня, что при вычислении производной по x переменная $y = const$:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 5y - 3x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x - 3y^2$;.

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + \cos(x + y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin y + \cos(x + y)$.

Определение 9. Геометрически частные производные, вычисленные в точке (x_0, y_0), равны тангенсам угла наклона касательных к поверхности $z = f(x, y)$ в этой точке. Касательные лежат в плоскостях $x = x_0$, $y = y_0$, параллельных координатным плоскостям *YOZ* и *XOZ* соответственно, например, $f_y^{'}(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\,\beta$ (рис. 9, рис. 10).

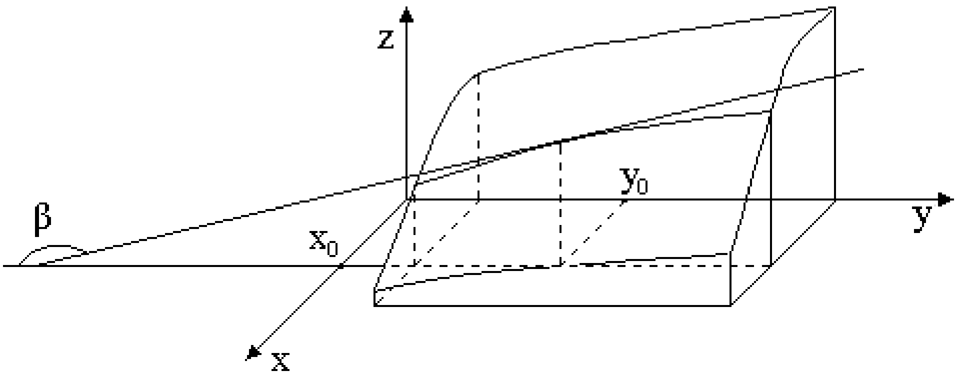


Рис. 9. Геометрическая интерпретация частных дифференциалов в пространстве

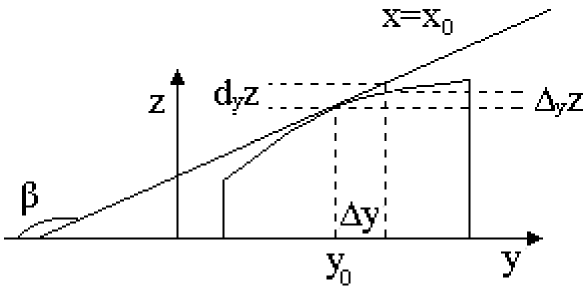


Рис. 10. Геометрическая интерпретация частных дифференциалов на плоскости

Пусть задана функция многих переменных $z = f(x, y)$. Частными дифференциалами переменных x и y называют главные части значений частных приращений:

$$\Delta_x z = d_x z + \varepsilon(x, y) \quad \Rightarrow \quad d_x z = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

$$\Delta_y z = d_y z + \eta(x, y) \quad \Rightarrow \quad d_y z = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

так как при $\Delta x \to dx$ и $\Delta y \to dy$ величины $\varepsilon(x, y)$ и $\eta(x, y)$ становятся бесконечно малыми (рис. 9).

Определение 10. *Частным дифференциалом функции многих переменных* называется произведение частной производной по независимой переменной на дифференциал этой переменной.

2. Полный дифференциал и его геометрическая интерпретация

Пусть Δz – полное приращение функции $z = f(x, y)$. Считая его малым по сравнению со значением самой функции, можно применить принцип суперпозиции, и представить полное приращение функции многих переменных в виде:

$\Delta z = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x, y) = a\Delta x + b\Delta y$

Соответственно, дифференциал функции многих переменных есть:

$dz = f(x + dx,\, y + dy) - f(x, y) = adx + bdy$

Найдем коэффициенты a и b методом сечений. Пусть $y = y_0$, тогда

$$d\,z\big|_{y=y_0} = d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx = adx \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Теперь пусть $x = x_0$:

$$d\,z\big|_{x=x_0} = d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy = bdy \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Отсюда следует:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (5)$$

Определение 11. *Полным дифференциалом функции многих переменных* называется сумма произведений частных производных на соответствующие дифференциалы независимых переменных.

Для функции трех переменных $u = u(x, y, z)$ дифференциал равен:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (6)$$

Определение 12. Функция многих переменных, имеющая в некоторой точке (x_0, y_0) дифференциал, называется *дифференцируемой в этой точке*. Очевидно, что для дифференцируемости требуется существование частных производных и их непрерывность.

Пример 4. Найти полный дифференциал для функции $z = x^y$.

Решение. Используем формулу (5):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \quad \Rightarrow \quad dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy.$$

2.1. Геометрический смысл дифференциала

Ранее показано, что выражения: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=y_0}$ являются угловыми коэффициентами касательных прямых к поверхности $z = f(x, y)$ в плоскостях $y = y_0$ и $x = x_0$. Известно, что через две прямые, пересекающиеся в одной точке, можно провести одну плоскость. Найдем уравнение этой плоскости, называемой ***касательной плоскостью***, используя уравнения касательных прямых:

$$z - z_0 = z'_x (x - x_0), \qquad \left. z'_x \right|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \alpha, \qquad y = y_0$$

$$z - z_0 = z'_y (y - y_0), \qquad \left. z'_y \right|_{y=y_0} = \operatorname{tg} \beta, \qquad x = x_0$$

Отсюда следует, что общее уравнение касательной плоскости есть:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где:

$$A = \left. z'_x \right|_{x_0, y_0} \qquad B = \left. z'_y \right|_{x_0, y_0} \qquad C = -1$$

или:

$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \right) \cdot (x - x_0) + \left(\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \right) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0 \qquad (7)$$

Определение 13. *Касательной плоскостью* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) называется плоскость, коэффициенты общего уравнения которой есть частные производные от функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Из уравнения касательной плоскости видно, что нормаль к поверхности есть вектор (рис. 11):

$$\vec{\mathbf{N}} = \left\{ z'_x, z'_y, -1 \right\} = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}} ,$$

а уравнение нормальной прямой к поверхности:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}} = \frac{z - z_0}{-1} \qquad (8)$$

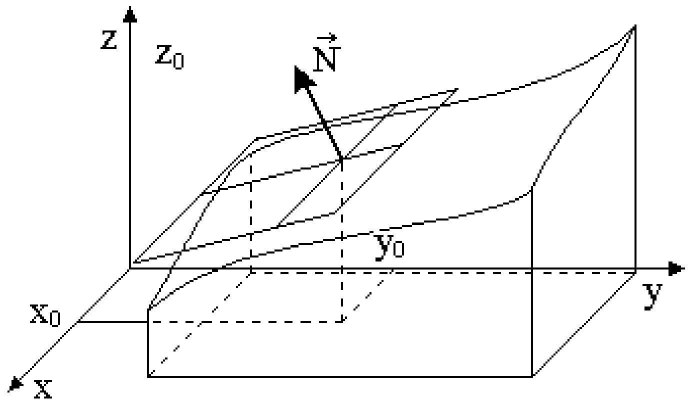


Рис. 11. Геометрическая иллюстрация нормали к поверхности

Из выше сказанного следует, что геометрически полный дифференциал функции многих переменных изображается приращением аппликаты касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ относительно точки касания.

2.2. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Пренебрегая бесконечно малой $\delta(x, y) = \varepsilon(x, y) + \eta(x, y)$ в выражении для приращения функции $\Delta z = dz + \delta(x, y)$, можно получить формулу для приближенного вычисления значения функции:

$$\Delta z \approx z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$$

или:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0), \tag{9}$$

которая означает замену поверхности $z = f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) на касательную плоскость к этой поверхности.

Пример 5. Дана функция $z = x^2 - y^2 + 4x - 3y$, точки $A(3,1)$ и $B(3.01,0.98)$ Найти значение $z(B)$ и составить уравнение касательной плоскости.

Решение. Так как $z_A = 9 - 1 + 12 - 3 = 17$, следовательно, $M(3;1;17)$ — точка на поверхности $z = f(x, y)$. Применим формулу (9) для приближенного вычисления функции многих переменных, считая точку A фиксированной точкой $(x_0 = 3, y_0 = 1)$, а точку B – текущей $(x = 3{,}01, y_0 = 0{,}98)$:

$$z_B \approx z_A + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot (x_B - x_A) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot (y_B - y_A)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = (2x + 4)|_A = 10\,, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = (-2y - 3)|_A = -5 \quad \Rightarrow$$

$$z_B \approx 17 + 10(3{,}01 - 3) + (-5)(0{,}98 - 1) \approx 17 + 0{,}1 + 0{,}1 \approx 17{,}2$$

Точное значение: $\bar{z}_B = 17{,}1997$. Оценим относительную погрешность вычислений: $|\bar{z}_B - z_B| = \Delta z$, $\delta = \dfrac{\Delta z}{z_B} \cdot 100\% = 0{,}02\%$. Используя значения частных производных в точке A, получим уравнение касательной плоскости:

$10(x-3) - 5(y-1) - (z-17) = 0$.

Пример 6. Вычислить значение величины: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}02}{0{,}95}\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ и положим в $y_0 = 1, x_0 = 1$, следовательно, точка $A(1{,}1)$, точка $B(0{,}95{,}1{,}02)$. Тогда, согласно (9):

$$z_B \approx z_A + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot (x_B - x_A) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot (y_B - y_A)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \left.\left[\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(\frac{-y}{x^2}\right)\right]\right|_A = -\frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = \left.\left[\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right|_A = \frac{1}{2}$$

Значение функции в точке A: $z_0 = \operatorname{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

Следовательно,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}02}{0{,}95}\right) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(1{,}02-1) - \frac{1}{2}(0{,}95-1) \approx 0{,}785 + 0{,}01 + 0{,}025 \approx 0{,}82$$

.

3. Дифференцирование неявно заданных и сложных функций

Пусть функция многих переменных задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $z = z(x, y)$. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, для чего вычислим частные дифференциалы по переменным x и y от функции $F(x, y, z) = 0$:

$$d_x F(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial z}dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}dx = 0$$

$$d_y F(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$$

Из последних выражений следует, что:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}, \tag{10}$$

при выполнении условия

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Теперь можно записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, задаваемой уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке (x_0, y_0):

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Bigg|_{x_0, y_0} \cdot (x - x_0) - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z}\right)\Bigg|_{x_0, y_0} \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

следовательно,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{x_0, y_0}\right) \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{x_0, y_0}\right) \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{x_0, y_0}\right) \cdot (z - z_0) = 0 \quad (11)$$

– уравнение касательной плоскости, а

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{x_0, y_0}} \quad (12)$$

– уравнение нормали к поверхности.

Точка z_0 определяется из равенства $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Пример 7. Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Находим производные неявной функции многих переменных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2x}{2z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2y}{2z},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -\frac{x_0}{z_0}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -\frac{y_0}{z_0}.$$

Подставляем найденные значения производных в уравнение (11):

$$\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) + \frac{y_0}{z_0}(y - y_0) + (z - z_0) = 0,$$

или

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z + 1 = 0.$$

Пример 8. Найти частные производные для уравнения: $F(x, y, z) = e^{-xy} - 2z + e^z$.

Решение. Находим частные производные неявно заданной функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-xy}(-y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^{-xy}(-x), \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -2 + e^z,$$

откуда, согласно (10):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-ye^{-xy}}{e^z - 2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

Пример 9. Составить уравнение касательной плоскости к эллипсоиду вращения:

$$x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1 \qquad \text{в точке } M\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Решение. Рассчитываем коэффициенты уравнения касательной плоскости:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M = 2z|_M = 1, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M = y|_M = 1, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M = 2z|_M = 1,$$

и подставляем в (11):

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + (y-1) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0, \Rightarrow x + y + z - 2 = 0.$$

3.1. Дифференцирование сложных функций

При дифференцировании сложных функций многих переменных возможны два случая:

1. $z = f(u,v)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – промежуточные аргументы. Тогда:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

откуда следует:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{13}$$

Пример 10. Найти производную функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$.

Решение. В разделе «Дифференцирование функций одной переменной» производная такой функции находится с помощью логарифмического дифференцирования. Использование формулы (13) значительно упрощает нахождение производной:

$$z = u^v, \quad \text{где} \quad u = \operatorname{tg} x, \quad v = \sin x \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln v \frac{dv}{dx} = \frac{\sin x \cdot (\operatorname{tg} x)^{\sin x}}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} +$$

$$+ (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \cdot \ln \operatorname{tg} x \cdot \cos x = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} \cdot \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x\right).$$

2. $z = f(u,v)$, где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. В этом случае $z = F(x,y)$ и, если все функции дифференцируемы, то:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{14}$$

Теперь можно доказать инвариантность формы дифференциала сложной функции многих переменных:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}dy=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Форма полного дифференциала не зависит от того, в каких переменных он записан.

*<u>Свойства полного дифференциала (</u>*u, v *<u>– функции многих переменных):</u>*

1. Инвариантность формы записи;
2. Вынесение константы за знак дифференциала
$d(cu)=cdu$;
3. Дифференциал суммы двух функций
$d(cu)=cdu$;
4. Дифференциал произведения двух функций
$d(uv)=vdu+udv$;
5. Дифференциал частного двух функций
$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

4. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Эти производные также являются функциями многих переменных и, в свою очередь, могут иметь частные производные по переменным x и y, которые называются частными производными второго порядка от функции $z=f(x,y)$.

Функция двух переменных имеет две производные 1-го порядка, каждая из которых имеет две производные 2-го порядка, следовательно, $z=f(x,y)$ может иметь четыре частных производных 2-го порядка, из которых последние две называются смешанными:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{yx},\tag{15}$$

Пример 11. Найти все вторые производные для функции:

$z = e^{x+y} + x^3y - xy^3 + x + 1.$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} + 3x^2y - y^3 + 1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y} + x^3 - 3xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x+y} + 6xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y} - 6xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x+y} + 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x+y} + 3x^2 - 3y^2.$$

Из примера видно, что смешанные производные в (15) не зависят от способа взятия, то есть можно получить сначала производную по x, а затем по y, или наоборот. Этот вывод подтверждает следующая теорема.

Теорема 1. Если вторые смешанные производные функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то они равны между собой. (без доказательства)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \text{или} \quad f''_{xy} \equiv f''_{yx}. \tag{16}$$

4.1. Полные дифференциалы высших порядков

Пусть x и y – независимые переменные, то есть дифференциалы dx и dy можно считать постоянными и зависящими только от нашего выбора. Тогда:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dxdx +$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dydy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Аналогично:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

или, используя бином Ньютона, для произвольного n:

$$d^nz = \sum_{k=0}^{n} c_n^k \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k}dy^k = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z = \mathbf{L}^n z, \tag{17}$$

где $\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ – линейный дифференциальный оператор.

4.2. Первообразная полного дифференциала

До сих пор мы рассматривали задачу дифференцирования, то есть по исходной функции находили ее дифференциал. Такая задача называется прямой.

Теперь рассмотрим так называемую обратную задачу: по дифференциалу определим саму функцию. Как и любая обратная задача, эта задача, называемая нахождением первообразной, не всегда корректна. В данном случае эта некорректность состоит в том, что первообразная всегда определена с точностью до постоянной величины.

Определение 14. Функция многих переменных, непрерывная вместе со своими первыми производными, называется *гладкой*.

Определение 15. Пусть имеются две непрерывные, гладкие функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Дифференциальное выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом, если существует функция $U(x,y)$, дифференциал которой $dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Функция $U(x,y)$ называется *первообразной функции двух переменных*.

Теорема 2. Для того чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнения тождества:

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{18}$$

Доказательство. Так как $dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, то

$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q,$ следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ и, в силу теоремы о независимости порядка взятия производных, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Теперь пусть заданы $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и необходимо найти $U(x,y)$. Так как:

$$dU=P(x,y)dx+Q(x,y)dy \text{ и } \frac{\partial U}{\partial x}=P,$$

то, интегрируя последнее выражение по переменной x, получим:

$$U=\int P(x,y)dx+\varphi(y).$$

Функция $U(x,y)$ определена с точностью до постоянной относительно x функции $\varphi(y)$, которую найдем следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial U}{\partial y}=\int\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv Q(x,y)\ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)-\int\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)dx\quad\Rightarrow\quad\varphi(y)=\int\left[Q(x,y)-\int\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)dx\right]dy+c,$$

откуда следует, что:

$$U=\int P(x,y)dx+\int\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy+c.$$

Следствие. Для случая функции трех переменных $U(x,y,z)$ выражение

$$dU = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

является полным дифференциалом функции, если выполняются соотношения:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{19}$$

*Пример 12.*Дан дифференциал функции $dU = (e^y + x)\,dx + \left(xe^y - 2y\right)dy$. Найти функцию $U(x,y)$.

Решение. Проверим, является ли данное выражение полным дифференциалом:

$$P = e^y + x, \quad Q = xe^y - 2y, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y.$$

Условие (18) выполнено, значит можно определить искомую функцию:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P = e^y + x, \quad \Rightarrow \quad U = e^y x + \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y),$$

и постоянную относительно x функцию $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = xe^y + \varphi'(y) = Q = xe^y - 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = -2y \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(y) = -y^2 + c \quad \Rightarrow \quad U = xe^y + \frac{1}{2}x^2 - y^2 + c.$$

В заключение приведем ряд Тейлора для функции двух переменных

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{f'_x}{1!}(x - x_0) + \frac{f'_y}{1!}(y - y_0) + \frac{f''_{xx}}{2!}(x - x_0)^2 +$$
$$+ \frac{f''_{yy}}{2!}(y - y_0)^2 + f''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + \ldots . \tag{20}$$

5. Экстремум функции многих переменных

Пусть функция двух переменных $z = f(x,y)$ – гладкая в области D и пусть $M(x_0,y_0) \in D$.

Определение 16. Точка $M(x_0,y_0)$ называется *точкой локального экстремума* (max или min) для функции $z = f(x,y)$, если значение функции $f(x_0,y_0)$ есть наибольшее (max) или наименьшее (min) в окрестности точки $M(x_0,y_0)$.

Теорема 3. *(необходимый признак существования экстремума).* Если в точке $M(x_0,y_0)$ функция имеет локальный экстремум, то ее частные производные первого порядка равны нулю:

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 0 \\
\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 0 \;.
\end{cases}
\tag{21}
$$

Доказательство основано на методе сечений (рис. 12, рис. 13).

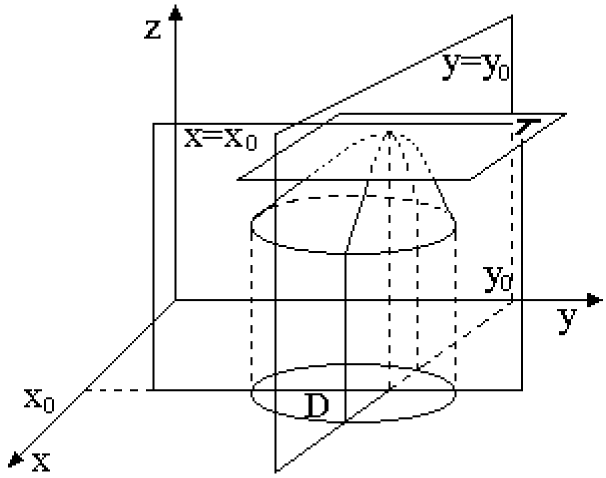


Рис. 12. Геометрическая интерпретация метода сечений в пространстве

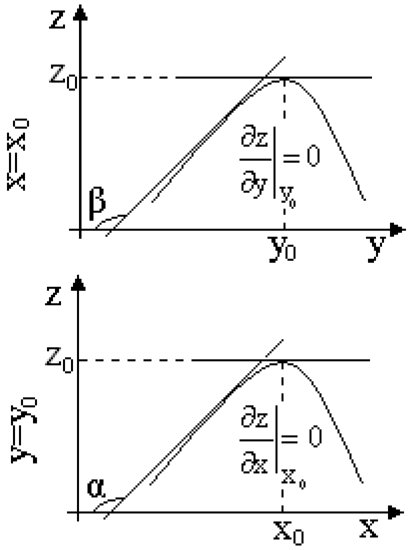


Рис. 13. Геометрическая интерпретация метода сечений на плоскости

На рис. 12 плоскость *D*, содержащая в себе две касательные, параллельна плоскости ХОУ и имеет уравнение $z = z_0$. Действительно, ее уравнение содержит нулевые частные производные в точке $M(x_0, y_0)$:

$$
\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) - \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z_0 .
$$

Замечание 1. Функция может иметь экстремум, но не быть дифференцируемой. Например, конус $z=+\sqrt{x^2+y^2}$ или $x^2+y^2-z^2=0$, $z\geq 0$ в точке $O(0{,}0)$ имеет минимум, но его производные терпят разрыв первого рода (скачок) в этой точке (рис. 14).

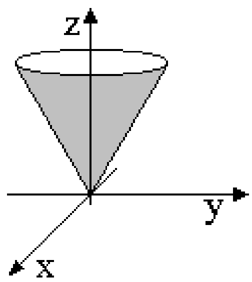


Рис. 14. Геометрическая интерпретация конуса

Замечание 2. Выполнение необходимых условий существования экстремума, еще не значит, что он действительно существует.

Например, для седловины $z=y^2-x^2$, частные производные первого порядка равны нулю в точке $O(0{,}0)$, но экстремума нет (рис. 15).

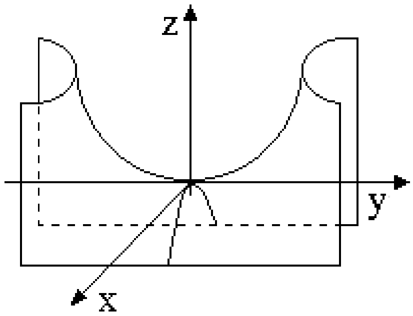


Рис. 15. Геометрическая интерпретация седловины

Из второго замечания следует, что равенство нулю первых производных функции многих переменных определяет так называемые критические, или стационарные точки на плоскости, в которых функция только может иметь экстремум.

Пример 13. Найти стационарные точки для функции:

$$z=-\frac{2}{3}x^3+2xy^2+y^2$$

Решение. Приравниваем первые производные к нулю и решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2x^2+2y^2=0\\ 4xy+2y\ \ =0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \quad \begin{cases}x=-1/2\\ y=-1/2\end{cases} \quad \begin{cases}x=-1/2\\ y=\ \ 1/2\end{cases}$$

Для данной функции имеются три стационарных точки: $M_1(0;0)$, $M_2(-0,5;-0,5)$, $M_3(-0,5;0,5)$.

Теорема 4. (*достаточные условия существования экстремума*).

Пусть в точке $M(x_0, y_0)$ выполнены необходимые условия существования экстремума (21). Вычислим вторые производные в этой точке и обозначим их:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M = f''_{xx}\big|_M; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M = f''_{xy}\big|_M; \quad c = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M = f''_{yy}\big|_M .$$

Тогда:

- если $AC - B^2 > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет экстремум, причем при $A < 0$ и $C < 0$ это максимум, а при $A > 0$ и $C > 0$ это минимум.
- если $AC - B^2 < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ не имеет экстремума.
- если $AC - B^2 = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Доказательство. Представим $z = f(x, y)$ многочленом Тейлора (20) в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ с учетом равенства нулю первых производных в этой точке:

$$\Delta f \approx \frac{f''_{xx}}{2!}\Delta x^2 + \frac{f''_{yy}}{2!}\Delta y^2 + f''_{xy}\Delta x \Delta y + \ldots.$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Очевидно, что при $\Delta f < 0$ функция имеет максимум, а при $\Delta f > 0$ – минимум. Представим приращение функции Δf в виде:

$$\Delta f \approx \frac{1}{2}\left(A\Delta x^2 + C\Delta y^2 + 2B\Delta x \Delta y\right)\cdot \frac{A}{A} = \frac{1}{2A}\left(A^2\Delta x^2 + CA\Delta y^2 + 2BA\Delta x \Delta y\right) =$$

$$= \frac{1}{2A}\left(A^2\Delta x^2 + 2AB\Delta x \Delta y + B^2\Delta y^2 - B^2\Delta y^2 + AC\Delta y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2A}\left\{\left(A\Delta x + B\Delta y\right)^2 + \Delta y^2\left(CA - B^2\right)\right\}.$$

Из последнего выражения видно, что знак приращения функции определяется знаком величин A и $CA - B^2$, причем экстремум существует только при $CA - B^2 > 0$ и есть минимум при $A > 0$ (максимум при $A < 0$). Отметим также, что величина $CA - B^2$ может быть представлена как значение определителя:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

В случае, если $\delta = CA - B^2 = 0$, то наличие экстремума зависит от соотношения между слагаемыми в выражении для Δf, то есть требуется дополнительное исследование функции.

Пример 14. Найти экстремум функции: $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Решение. Находим все решения системы уравнений (21):

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6x^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5/3 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2y(x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 6 + y^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Следовательно, точки, в которых может быть экстремум: $M_1(0;0)$, $M_2(-\frac{5}{3};0)$, $M_3(-1;-2)$, $M_4(-1;2)$. Вычисляем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2.$$

Теперь исследуем на экстремум каждую из полученных точек:

$$M_1(0,;0) \qquad A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = (12x + 10)\big|_{(0;0)} = 10 > 0$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = 2y\big|_{(0;0)} = 0$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = (2x + 2)\big|_{(0;0)} = 2 > 0$$

$AC - B^2 > 0 \;\Rightarrow\; M_1$ - точка минимума, $z_{\min}(0;\,0) = 0$

$$M_2(-5/3;0) \qquad A = -10 < 0$$
$$B = 0$$
$$C = -4/3 < 0$$

$AC - B^2 > 0 \;\Rightarrow\; M_2$ - точка максимума, $z_{\max}(-5/3;0) = (5/3)^3$

$$M_3(-1;-2) \qquad A = -2 < 0$$
$$B = -4$$
$$C = 0$$

$AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ неопределенный случай, экстремума нет

$$M_4(-1;2) \qquad A = -2 < 0$$
$$B = 4$$
$$C = 0$$

$AC - B^2 < 0 \;\Rightarrow\;$ экстремума нет.

Ответ: $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 4{,}63$ или $\min(0;0;0)$, $\max\left(-\frac{5}{3};0;\frac{125}{27}\right)$.

5.1. Наибольшее и наименьшее значения функции многих переменных

Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит области D, заданной вместе со своей границей.

Правило. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области, нужно найти все максимумы и минимумы функции внутри этой области, а также наибольшее и наименьшее значение функции на границе области. Затем из всех полученных значений нужно выбрать одно действительно наибольшее (M) и одно действительно наименьшее (m) значение функции.

Пример 15. Найти наибольшее и наименьшее значение для функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, заданной в области (рис. 16):

$$D: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

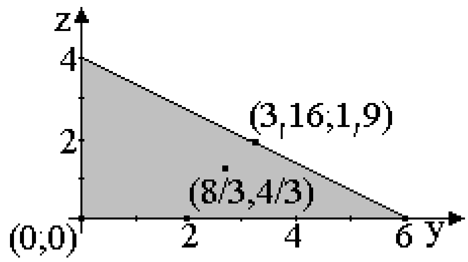


Рис. 16. Геометрическая иллюстрация области D

Решение. Находим наибольшее и наименьшее значение функции внутри данной области:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 4 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8/3 \\ y = 4/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(8/3;4/3)} = 2 > 0 \\ B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(8/3;4/3)} = -1 \\ C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(8/3;4/3)} = 2 > 0 \end{cases}$$

Так как $AC - B^2 > 0$, следовательно, точка $M\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right)$ – точка минимума, $z_{\min} = -\frac{16}{3}$.

Теперь находим наибольшее и наименьшее значения функции на границах области (рис. 16).

$$x = 0 \;\Rightarrow\; z = y^2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dy} = 2y \;\Rightarrow\; z\big|_{x=0} = 0 \;\text{(min)},\quad z\big|_{y=0} = 0\,\text{(min)}$$

$$y = 0 \;\Rightarrow\; z = x^2 - 4x \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 2x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2\;\text{(min)},\; z\big|_{x=2} = -4\,\text{(min)}$$

$$2x + 3y = 12 \;\Rightarrow\; y = \frac{12 - 2x}{3} \;\Rightarrow\; z = x^2 + \left(\frac{12-2x}{3}\right)^2 - x\left(\frac{12-2x}{3}\right) - 4x$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 2\cdot\frac{12-2x}{9}\cdot 2 - \frac{12-2x}{3} + \frac{2}{3}x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; 38x - 120 = 0 \;\Rightarrow$$

$$x = 3{,}16 \;\Rightarrow\; y = 1{,}9$$

$$z\big|_{3,16;1,9} \approx -5$$

$$z\big|_{6;0} = 36 - 24 = 12$$

Из всех полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$$M = z(0;4) = 16$$

$$m = z\left(\frac{8}{3};\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}.$$

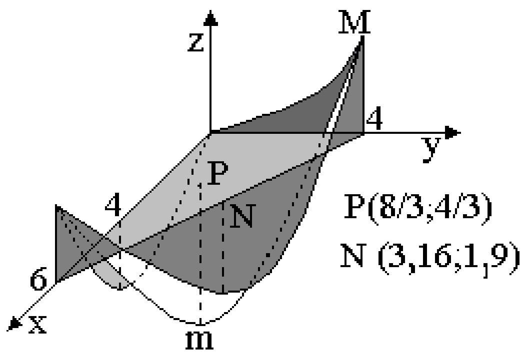


Рис. 17. Геометрическая интерпретация

5.2. Условный экстремум

Часто возникают задачи по отысканию экстремумов функций, связанных дополнительными условиями.

Например, необходимо найти экстремум функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ при условии $x+y=1$. Это значит, что мы должны искать точку экстремума на линии, являющейся пересечением данной поверхности $z=f(x,y)$ с поверхностью, образованной уравнением: $x+y=1$. У данной функции есть абсолютный максимум в точке M, а точка P является условным максимумом функции, существующем только при выполнении условия $x+y=1$, называемым уравнением связи (рис. 18).

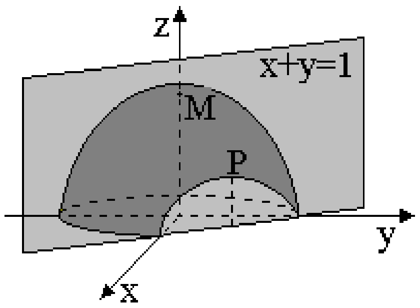


Рис. 18. Геометрическая интерпретация функции

В качестве иллюстрации понятия условного экстремума рассмотрим задачу прокладки железнодорожного пути через гору. Самое простое решение – обойти гору, но оно, как правило, приводит к большим затратам из-за увеличения длины пути. Второе решение – провести путь через гору, более оптимально, но для него существуют ограничения в виде максимально допустимого угла наклона пути к горизонту. Тем не менее, возможно провести путь так, чтобы не превысить максимальный угол наклона и сократить длину пути. Такое решение называется *оптимальным*, а методы, позволяющие получать оптимальные решения, называются *методами оптимизации*.

Правило нахождения условного экстремума, или правило Лагранжа, можно сформулировать следующим образом.

Правило. Для нахождения точек условного экстремума функции $z=f(x,y)$ при уравнении связи $\psi(x,y)=0$, образуют вспомогательную функцию

$$\Phi(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot\psi(x,y), \tag{22}$$

где λ – произвольная константа. Затем $\Phi(x,y)$, называемую функцией Лагранжа, исследуют на экстремум с использованием уравнений связи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=0 \\ \psi(x,y)=0 \end{cases} \tag{23}$$

для нахождения точки условного экстремума (x_0, y_0), соответствующей определенному значению λ.

Очевидно, что такую задачу можно решить как задачу нахождения экстремума функции одной переменной $z = f(x, \varphi(x))$, где $\varphi(x)$ - функция, выраженная относительно переменной y из уравнения связи. Однако это значительно усложняет вычисления.

Пример 16. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ (параболоид вращения), при условии: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} + 1$ (рис. 19).

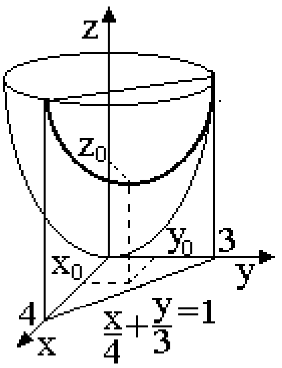


Рис. 19. Геометрическая интерпретация параболоида вращения

Решение. Составляем функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x/4 + y/3 - 1)$$

и исследуем её на экстремум:

$$\begin{cases} 2x + \lambda/4 \quad = 0 \\ 2y + \lambda/3 \quad = 0 \\ x/4 + y/3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\lambda/8 \\ y_0 = -\lambda/6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-\lambda/32 - \lambda/18 = 1 \Rightarrow \lambda = -11{,}52.$$

При данном значении λ экстремум находится в точке с координатами:

$$x_0 = \frac{-11.52}{-8} \approx 1{,}44 \qquad y_0 = \frac{-11.52}{-6} \approx 1{,}92.$$

Проверяем точку на наличие экстремума:

$$A = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2 > 0\,, \quad B = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0\,, \quad C = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$AC - B^2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0) - \text{точка минимума, } z_{\min} \approx 5{,}76 \;\; \text{Ответ}: z_{\min} \approx 5{,}76.$$

6. Скалярное поле. Производная по направлению и градиент

Рассмотрим функцию трех переменных $U(x,y,z)$. Здесь x,y,z можно рассматривать как координаты точки M, следовательно, $U(M)$ – функция точки, принадлежащей некоторой области D: $M(x,y,z)\in D$.

Определение 17. *Скалярным полем* называется скалярная функция точки $U(M)$ в области D.

Примером скалярного поля является поле потенциала точечного электрического заряда

$$U=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Определение 18. *Поверхностью уровня скалярного поля* называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает одно и тоже значение, и определяется уравнением $U(x,y,z)=const$.

Например, для кулоновского поля точечного заряда поверхностью уровня является сфера $x^2+y^2+z^2=\text{const}$.

Решим задачу о нахождении производной от функции $U(M)$ в заданном направлении.

Пусть задана функция $U(x,y,z)$ и луч λ с единичным вектором

$$\vec{\mathbf{e}}_\lambda=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

На луче имеются точки $M(x,y,z)$ и $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$.

Здесь:

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\left|\overrightarrow{\mathbf{MM}_1}\right|$,

α,β,γ – эйлеровы углы.

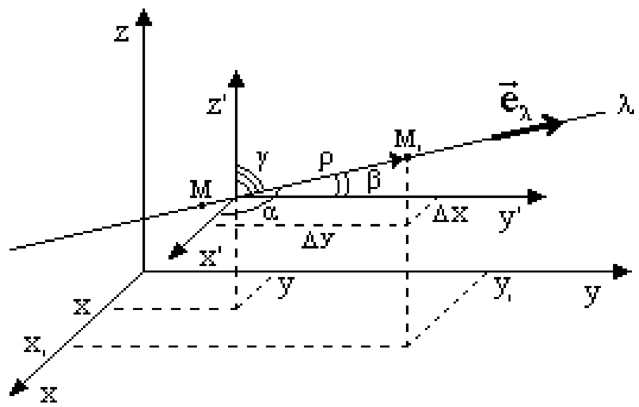


Рис. 20. Геометрическая интерпретация функции

Из рис. 20 видно, что:

$$x_1=x+\Delta x=x+\rho\cos\alpha$$

$$y_1=y+\Delta y=y+\rho\cos\beta$$

$$z_1=z+\Delta z=z+\rho\cos\gamma$$

Составим производную:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} \equiv \lim_{\rho \to 0} \frac{U(M_1) - U(M)}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{U(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - U(x,y,z)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{dU + \varepsilon(x,y,z)}{\rho} == \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z \right) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = \left(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\lambda \right),$$

где: $$\vec{\mathbf{A}} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\} = \vec{\mathbf{grad}}\, U = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial U}{\partial z} = \vec{\nabla} U \qquad (24)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z} - \text{оператор Гамильтона},$$

$$\vec{\mathbf{grad}}\, U = \vec{\nabla} U \text{ - градиент функции } U.$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \left(\vec{\nabla} U \cdot \vec{\mathbf{e}}_\lambda \right) \qquad (25)$$

Определение 19. *Градиентом* $\vec{\nabla} U$ функции $U(x,y,z)$ называется вектор с координатами $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$.

Определение 20. *Производная по направлению* называется скалярным произведением градиента функции на единичный вектор этого направления.

Отметим, что градиент функции определяет направление наибыстрейшего изменения значений функции, поскольку:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \left(\vec{\nabla} U \cdot \vec{\mathbf{e}}_\lambda \right) = \left| \vec{\nabla} U \right| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda} - \text{максимально, когда } \varphi = 0.$$

Напомним, что, согласно (10), уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M},$$

откуда следует, что градиент функции в точке $M(x,y,z)$ есть:

$$\vec{\nabla} U = \left\{ \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M, \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M, \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M \right\} = \vec{\mathbf{N}}.$$

Свойство. Направление градиента функции $U(x,y,z)$ в каждой точке $M(x,y,z)$ совпадает с направлением нормали к поверхности уровня скалярного поля.

Пример 17. Найти величину и направление градиента скалярного поля

$$U = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z \quad \text{в точке} \quad M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$$

Решение. Находим производные функции в заданной точке и вычисляем градиент согласно формуле (24):

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\right|_{\frac{\pi}{4}} = 1 \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\left(3\cos y - 3\sin^2 y \cdot \cos y\right)\right|_{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\left(1 - \frac{1}{\sin^2 z}\right)\right|_{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} U = \{1, 3/8, 0\}, \qquad \left|\vec{\nabla} U\right| = \frac{\sqrt{73}}{8}.$$

Пример 18. Найти производную от функции $U(x,y,z)$ в точке $A(5;1;2)$ в направлении точки $B(7;-1;3)$.

Решение. Находим координаты векторов

$$\vec{\mathbf{AB}} = \{2;-2;1\}, \quad \vec{\mathbf{e}}_\lambda = \{2/3; -2/3; 1/3\},$$

следовательно, производная от функции U в точке A в направлении вектора $\vec{\mathbf{e}}_\lambda$ согласно формуле (25) есть

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_A = (yz)|_A \frac{2}{3} + (xz)|_A\left(-\frac{2}{3}\right) + (yx)|_A \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4 - 20 + 5) = -\frac{11}{3},$$

причем знак «–« означает, что в данном направлении функция убывает.

Пример 19. Найти градиент функции $z = 2x^2 + 3xy + y^2$ в точке $A(2;\ 1)$ и ее производную в направлении вектора $\vec{\mathbf{a}} = \{3;-4\}$.

Решение. Находим координаты единичного вектора в направлении вектора $\vec{\mathbf{a}}$: так как модуль вектора есть $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{9+16} = 5$, то $\vec{\mathbf{e}}_a = \left\{\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}$.

Вычисляем производные от функции в точке A:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = (4x + 3y)|_A = 11, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = (3x + 2y)|_A = 8$$

и определяем градиент и производную функции по заданному направлению согласно (24), (25):

$$\vec{\nabla} z = 11\vec{\mathbf{i}} + 8\vec{\mathbf{j}} = \{11;8\}, \qquad \frac{\partial z}{\partial a} = 11 \cdot \frac{3}{5} - 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Пример 20. Найти градиент в точке $M(1;1;1)$ и производную по направлению вектора $\vec{\mathbf{a}} = \{1;2;2\}$ для функции $U = z\mathrm{e}^{xy^2}$:

Решение. Находим координаты единичного вектора в направлении вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и градиент функции U:

$\vec{\mathbf{e}}_a = \left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}U = \left(zy^2\mathrm{e}^{xy^2}\right)\Big|_M \vec{\mathbf{i}} + \left(2zyx\mathrm{e}^{xy^2}\right)\Big|_M \vec{\mathbf{j}} + \left(\mathrm{e}^{xy^2}\right)\Big|_M \vec{\mathbf{k}} = \{\mathrm{e};2\mathrm{e};\mathrm{e}\}$, затем определяем производную по направлению:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M = e, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = 2e, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = e \Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial a}\right|_M = e\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{7e}{3}.$$

Пример 21. Найти линию наибыстрейшего изменения функции $U = x^2y^3$, проходящую через точку $M(1;1)$.

Решение. Находим градиент функции:

$$\vec{\nabla}z = 2xy^3\,\vec{\mathbf{i}} + 3x^2y^2\,\vec{\mathbf{j}}.$$

Из условия коллинеарности элемента длины линии $d\ell$ и градиента имеем:

$$\frac{dx}{2xy^3} = \frac{dy}{3x^2y^2} \Rightarrow \frac{3}{2}xdx = ydy \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C.$$

Так как координаты точки M должны удовлетворять уравнению искомой линии, то

$$C = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{1/3} - \frac{y^2}{1/2} = 1,$$

следовательно, искомая линия есть гипербола.

7. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим задачу нахождения функциональной (или аналитической) зависимости для экспериментальных данных, заданных в виде таблицы:

x_1	x_2	…	x_n
y_1	y_2	…	y_n

При большом n нахождение интерполяционного многочлена затруднено, и поэтому проще искать аналитическую зависимость в виде многочлена степени m, много меньшей, чем n:

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m.$$

Многочлен $P_m(x)$ должен как можно более точно отображать общий ход экспериментальных данных. При этом он может не удовлетворять основному условию интерполяции:

$$P_m(x_1) = y_1,\ P_m(x_2) = y_2,\ \ldots\ P_m(x_n) = y_n,$$

то есть не будет интерполяционным многочленом.

Определим конкретный вид $P_m(x)$, для чего найдем коэффициенты a_i, $i = 0,\ldots,m$. Для этого используем метод наименьших квадратов, то есть потребуем, чтобы сумма квадратов разностей между экспериментальными значениями y_i и значениями многочлена $P_m(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$ была минимальной. Другими словами, найдем коэффициенты a_i из условия минимума функции:

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i\right]^2 .$$

Напомним, что функция многих переменных достигает минимума в точке, где обращаются в нуль её частные производные первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i\right] x_i^m = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i\right] x_i^{m-1} = 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - y_i\right] \cdot 1 = 0 \end{cases} .$$

Это система из $m+1$ линейных уравнений с $m+1$ неизвестными a_i, $i = 0,\ldots,m$. Решив её любым известным способом, определим многочлен $P_m(x)$, аппроксимирующий (то есть приближающий) функциональную зависимость, которой подчиняются заданные нам экспериментальные точки. При этом происходит сглаживание, или регрессия заданных точек (рис. 21).

Видно, что с ростом степени аппроксимирующего многочлена точность аппроксимации растет. Отметим также, что при $m = n$ $P_m(x)$ переходит в интерполирующий многочлен, который в точности равен значениям экспериментальных данных в точках x_i. Применим метод наименьших квадратов для аппроксимации экспериментальных данных многочленом первого порядка, который есть линейная функция

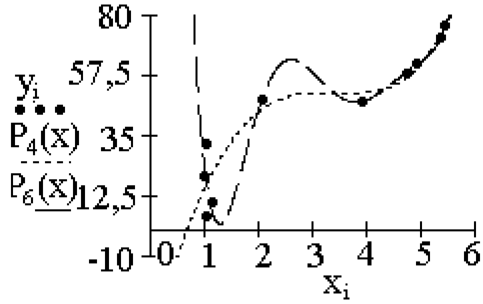


Рис. 21. Геометрическая иллюстрация регрессии

$P_1(x) = ax + b$. В этом случае $S = S(a,b)$ и условие её минимума дает систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[ax_i + b - y_i\right]x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[ax_i + b - y_i\right] \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\left[ax_i + b - y_i\right]x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left[ax_i + b - y_i\right] \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{xx}a + M_x b = M_{xy} \\ M_x a + b = M_y \end{cases},$$

где $M_x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $M_{xx} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $M_y = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $M_{xy} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Решив систему, определим коэффициенты a и b, то есть найдем явный вид аппроксимирующей функции.

Пример 22. Произвести аппроксимацию линейной функцией $P(x) = ax + b$ экспериментальных данных, заданных таблицей:

x_i	1,1	1,7	2,4	3,0	3,7	4,5	5,1	5,8
y_i	0,3	0,6	1,1	1,7	2,3	3,0	3,8	4,6

Решение. Составляем вспомогательную таблицу для вычисления коэффициентов M_x, M_y, M_{xy}, M_{xx}:

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1,1	0,3	0,33	1,21
1,7	0,6	1,02	2,89

2,4	1,1	2,64	5,76
3,0	1,7	5,1	9,00
3,7	2,3	8,51	13,69
4,5	3,0	13,5	20,25
5,1	3,8	19,38	26,01
5,8	4,6	26,68	33,64
27,3	17,4	77,16	112,64
3,412	2,175	9,645	14,056
M_x	M_y	M_{xy}	M_{xx}

Решаем систему уравнений $\begin{cases} 14{,}056 \cdot a + 3{,}412 \cdot b = 9{,}645 \\ 3{,}412 \cdot a + b = 2{,}175 \end{cases}$ для определения коэффициентов линейной регрессии *a* и *b*:Получим, *a=0,921*, *b= –0,968*.

Уравнение линейной регрессии имеет вид $P(x) = 0{,}921\,x - 0{,}968$ (рис. 20.

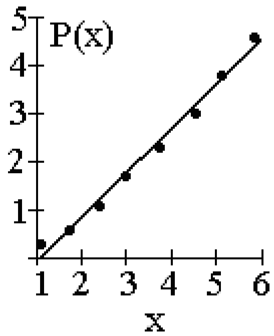


Рис. 22. Геометрическая интерпретация регрессии

8. Двойной интеграл, его геометрический смысл

Рассмотрим задачу о нахождении объема цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – непрерывная функция с ограниченной областью определения D, снизу плоскостью OXY и с боков цилиндрической поверхностью $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 23). Разобьем область определения D функции $z = f(x, y)$ на n частей и выберем в каждой из них точки $P_i(x_i, y_i)$. Из рис. видно, что объем цилиндрического тела состоит из объемов n частичных областей с основаниями $\Delta\sigma_i$:

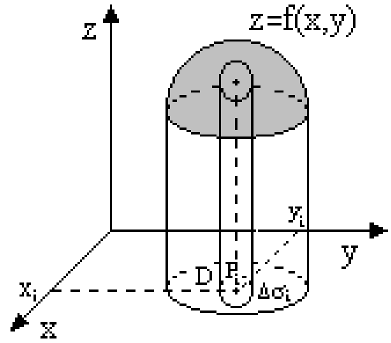


Рис. 23. Геометрическая интерпретация объема цилиндрического тела

$$V_n = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \cdots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \quad (26)$$

Выражение (26) называется n – ой интегральной суммой Римана. При увеличении числа частичных областей с одновременным уменьшением их максимального диаметра $\Delta\sigma_i$ задача нахождения объема цилиндрического тела сводится к нахождению предела:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta\sigma_i \to 0}} V_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i,$$

который называется римановым двойным интегралом от функции двух независимых переменных *z=f(x, y)* по области *D*:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i, \equiv \iint\limits_D f(x, y)d\sigma. \quad (27)$$

Здесь: $d\sigma$ – элемент площади; $f(x, y)$ – подынтегральная функция; D – область интегрирования.

Из определения двойного интеграла следует, что геометрически он представляет собой объем цилиндрического тела с образующими, параллельными оси OZ:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)d\sigma \quad (28)$$

Отметим, что при $f(x, y) < 0$ тело лежит ниже плоскости OXY, но имеет положительный объем. Определение двойного интеграла при этом не меняется, но он имеет отрицательный знак.

8.1. Теорема существования и свойства двойного интеграла

Теорема 4. Если функция непрерывна в области D, ограниченной замкнутой линией, то её n–я интегральная сумма с ростом n стремится к пределу, который есть двойной интеграл. Этот предел не зависит от способа разбиения области D на частичные области $\Delta\sigma_i$ и от выбора в них точек P_i. (без доказательства).

8.2. Свойства двойного интеграла

1. Двойной интеграл от суммы двух функций $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$ равен сумме двойных интегралов

$$\iint\limits_D \left[f_1(x, y) + f_2(x, y) \right] d\sigma = \iint\limits_D f_1(x, y)d\sigma + \iint\limits_D f_2(x, y)d\sigma. \quad (29)$$

Свойство следует из линейности операции интегрирования и справедливо при любом конечном количестве слагаемых в (29).

2. Константа может быть вынесена за знак двойного интеграла

$$\iint\limits_D C\cdot f(x,y)d\sigma = C\cdot\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

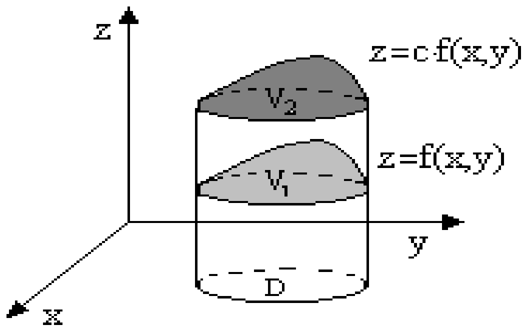


Рис. 24.Геометрическая интерпретация свойства 2 двойного интеграла

Свойство непосредственно следует из рис. 24, в котором $V_2=C\cdot V_1$ $(C > 0)$.

3. Если область интегрирования D разбить на две части D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

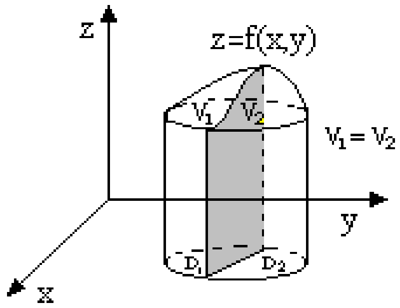


Рис. 25. Геометрическая интерпретация свойства 3 двойного интеграла

Свойство иллюстрируется рис. 23 и не зависит от количества частей, из которых состоит область D.

4. Если во всех точках области D: $f(x,y)>\varphi(x,y)$, то: $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma > \iint\limits_D \varphi(x,y)d\sigma$.

Свойство иллюстрируется рисунком 26.

5. Пусть m – наименьшее, а M – наибольшее значение $f(x,y)$ в D, причем: $m\le f(x,y)\le M$, и пусть S – площадь области D. Тогда: $V = mS \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS = V.$

Очевидность утверждения следует из рис. 24

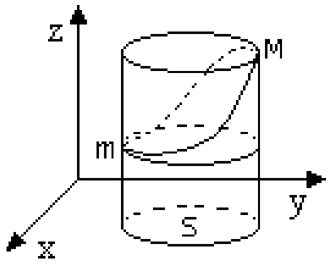


Рис. 26. Геометрическая интерпретация свойства 3 двойного интеграла

6. Теорема о среднем: Двойной интеграл равен произведению подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь этой области: $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S$.

Геометрически (рис. 27) это означает замену исходного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, цилиндром с высотой $h = f(\xi,\eta)$. При этом должно выполняться равенство $V_1 = V_2$.

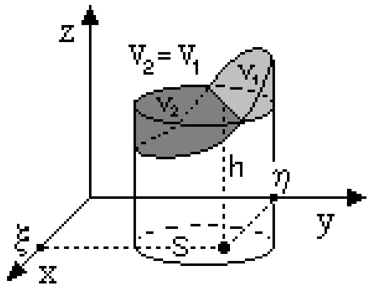


Рис. 27. Геометрическая интерпретация теоремы о среднем

8.3. Вычисление двойного интеграла

Для вычисления двойного интеграла необходимо определить конкретный вид выражения для элемента площади области интегрирования dσ в соответствующей системе координат. Следует отметить, что все полученные ниже формулы и правила справедливы только для односвязных областей.

Определение 22. Область называется *односвязной* по оси OX (OY), если она имеет только две точки пересечения с прямыми $x = const$ ($y = const$).

8.3.1. Декартова система координат

В декартовой системе координат можно достаточно просто определить элемент площади $d\sigma$. Для этого представим область D как сумму прямоугольников со сторонами Δx и Δy. Из рис. 28 видно, что $\Delta\sigma = \Delta x \cdot \Delta y$, причем при стремлении величин Δx и Δy к бесконечно малым dx, dy элемент площади $\Delta\sigma \to d\sigma$. Отсюда следует, что $d\sigma = dx \cdot dy$ и в декартовой системе координат:

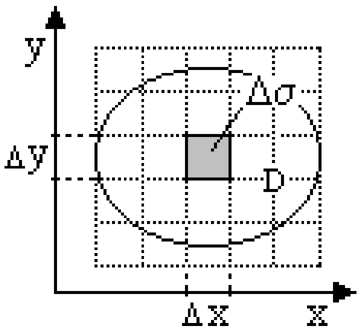


Рис. 28. Геометрическая интерпретация элемента площади $d\sigma$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{30}$$

Свяжем понятия двойного и определенного интегралов. Для этого вспомним, что объем тела можно выразить через определенный интеграл от площади S(x) поперечного сечения тела (фигура MNPR на рис. 29): $V = \int_a^b S(x)dx$

Из рис. 29 видно, что в нашем случае: $S(x) = \int_P^R f(x,y)dy$,

Так как при движении вдоль границы области *D* точки P и R описывают, соответственно, линии $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то: $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

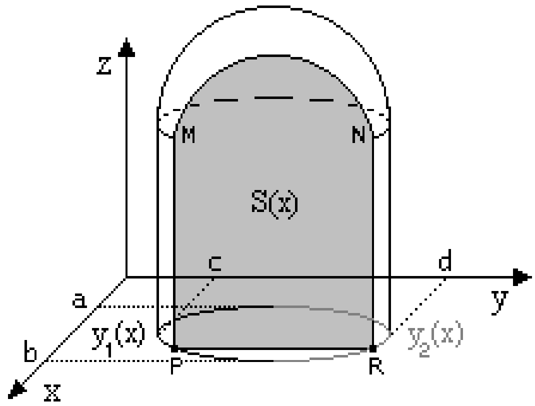


Рис. 29. Геометрическая интерпретация правила вычисления двойного интеграла

Отсюда следует:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad (31)$$

Формула (31) определяет правило вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат для области D, односвязной по оси OX: сначала вычисляется внутренний интеграл в (31) (при $x=const$) и в первообразную подставляются пределы $y_1(x)$ и $y_2(x)$, затем полученная функция только одного аргумента x интегрируется в пределах от a до b. В результате получаем число, которое представляет собой объем цилиндрического тела.

В случае, если область D является односвязной относительно оси *OY*, в (31) можно поменять порядок интегрирования. Применяя те рассуждения, что и при выводе формулы (28), получим:

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d S(y)dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(y,x)dx \qquad (32)$$

Если область *D* не является односвязной относительно осей *OX* или *OY*, то её разбивают на односвязные части и пользуются свойством двойного интеграла 3.

Итак, вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов, причем во внутреннем интеграле одна из переменных считается постоянной. Изложенный метод называется методом расстановки пределов. Отметим, что в этом методе сложность вычислений напрямую зависит от правильного выбора порядка интегрирования.

Пример 23. Вычислить интеграл $I=\iint_D (y+x)d\sigma$, если область *D* ограничена линиями: 1. D:{ $y=x^2$ и $y=x$ }; 2. D:{ $y=x, y=2x, y=2, y=3$ }.

Решение. 1. При вычислении двойного интеграла большое значение имеет правильно выполненный чертеж области D, так как с его помощью легче произвести расстановку пределов интегрирования. Найдем точки пересечения линий, задающих область D:

$$x^2=x \quad \Rightarrow \quad x^2-x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0;\ x=1.$$

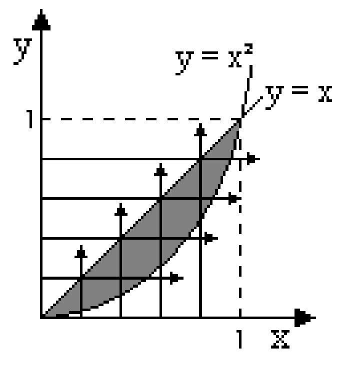


Рис. 30. Геометрическая иллюстрация примера 23

Так как область D – односвязная как по оси OX, так и по оси OY, то интеграл вычисляется сначала по формуле (31), затем – по формуле (32). При расстановке пределов в (31) учитывается, что переменная x меняется от 0 до 1, а переменная y – от линии $y = x^2$ до линии $y = x$. Это легко понять, если просечь область D прямыми, параллельными оси OY(рис. 30), все прямые входят в область D на линии $y = x^2$ и выходят из неё на линии $y = x$.

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (y + x)dy = \int_0^1 dx \left(\frac{y^2}{2} + xy \right)\Bigg|_{x^2}^{x} = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x^2 - \frac{x^4}{2} - x^3 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

Для вычисления интеграла по формуле (32) учитывается, что переменная y меняется от 0 до 1, а переменная x – от линии $y = x$ до линии $x = \sqrt{y}$. Это легко понять, если просечь область D прямыми, параллельными оси OX (рис. 30), все прямые входят в область D на линии $x = \sqrt{y}$ и выходят из неё на линии $y = x$:

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x + y)dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + yx \right)\Bigg|_y^{\sqrt{y}} = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y^{3/2} - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{4} + \frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{1}{2} y^3 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{20}.$$

Как и следовало ожидать, при вычислении интеграла получен одинаковый результат, который означает, что объем цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = x + y$, с основанием, изображенным на рис. 30, равен 3/20 единиц объема.

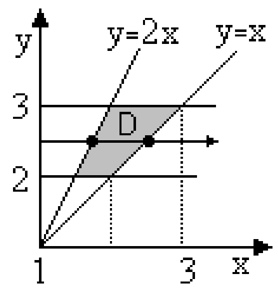


Рис. 31. Геометрическая иллюстрация области интегрирования, пример 23

2. Для области интегрирования, изображенной на рис. 31, целесообразно применить формулу (32), в которой переменная y меняется от 2 до 3, а переменная x – от линии $x = \dfrac{y}{2}$ до линии $x = y$:

$$I=\int_2^3 dy\int_{y/2}^{y}(x+y)dx=\int_2^3 dy\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_{y/2}^{y}=\frac{7}{8}\int_2^3 y^2dy=\frac{119}{24}.$$

Данный результат означает, что объем цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z=x+y$, с основанием, изображенным на рис. 31, равен 119/24 единиц объема.

Пример 24. Вычислить $I=\iint\limits_D 3xy^2dxdy$, где область интегрирования:

$$D:\begin{cases} y=x^2 \\ x+y=2 \\ y\geq 0,\ x\geq 0\ . \end{cases}$$

Решение. Находим точки пересечения параболы $y=x^2$ и прямой $y=2-x$:

$x^2=2-x\Rightarrow\ x^2+x-2=0\Rightarrow\ x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\Rightarrow\ x_1=-2;\ x_2=1.$

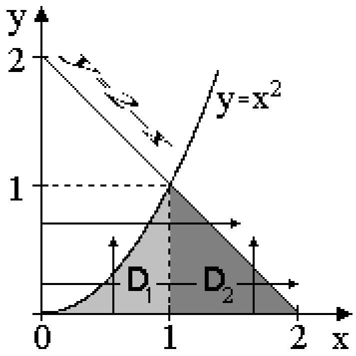


Рис. 32. Геометрическая иллюстрация области интегрирования, пример 24

Из рис. 32 видно, что нас интересует только положительный корень $x_2=1$, которому соответствует значение $y=1$.

Вычисляя интеграл по формуле (31), приходим к выводу, что верхний предел по переменной y нельзя описать одним выражением, так как прямые, параллельные оси OY, выходят из области D на разных линиях ($y=x^2$или $y=2-x$). Это означает, что область D должна быть разделена на части D_1 и D_2, и, соответственно, $I=I_1+I_2$:

$$I_1=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}3xy^2dy=3\int_0^1 xdx\int_0^{x^2}y^2dy=3\int_0^1 xdx\ \frac{y^3}{3}\bigg|_0^{x^2}=\int_0^1 x^7dx=\frac{x^8}{8}\bigg|_0^1=\frac{1}{8}.$$

$$I_2=\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}3xy^2dy=3\int\limits_1^2 xdx\int\limits_0^{2-x}y^2dy=3\int\limits_1^{12}xdx\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{2-x}=\int\limits_1^2 x(2-x)^3dx=$$

$$=\int\limits_1^2(x-2+2)(2-x)^3dx=-\int\limits_1^2(x-2)^4d(x-2)-2\int\limits_1^2(x-2)^3d(x-2)=$$

$$=\left.\left[-\frac{(x-2)^5}{5}-\frac{(x-2)^4}{2}\right]\right|_1^2=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{3}{10}\qquad\Rightarrow\qquad I=\frac{1}{8}+\frac{3}{10}=\frac{17}{40}.$$

Теперь вычислим интеграл по формуле (32). Так как прямые, параллельные оси OX, входят в D на линии $x=\sqrt{y}$ и выходят из неё на линии $x=2-y$, то:

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}3xy^2dx=3\int\limits_0^1 y^2dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}xdx=3\int\limits_0^1 y^2dy\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{y}}^{2-y}=\frac{3}{2}\int\limits_0^1 y^2\left[(2-y)^2-y\right]dy=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^1 y^2(4-4y+y^2-y)dy=\frac{3}{2}\int\limits_0^1(4y^2-5y^3+y^4)dy=\left.\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}y^3-\frac{5}{4}y^4+\frac{y^5}{5}\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{17}{40}.$$

Пример 24 показывает, что правильный выбор порядка интегрирования в двойном интеграле (в данном случае – использование формулы (32)) позволяет значительно упростить вычисления.

Пример 25. Найти объем тела, отсеченного от полуцилиндра плоскостью, проведенной через диаметр основания. Радиус основания R, максимальная высота полуцилиндра при пересечении с плоскостью равна H.

Тело представляет собой цилиндр с основанием, равным половине круга радиусом R, ограниченный сверху плоскостью $z=f(x,y)$. Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$ и из рис. 30 видно, что плоскость проходит через точку O(0,0) и параллельна оси OX, следовательно, её уравнение есть:

$$\left.\begin{matrix}D=0\\A=0\end{matrix}\right\}\quad\Rightarrow\quad By+C=0\quad\Rightarrow\quad z=-\frac{B}{C}y=\frac{H}{R}y.$$

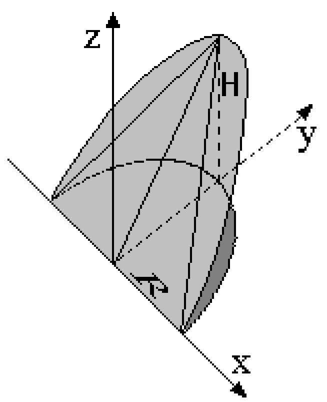


Рис. 33. Геометрическая иллюстрация области интегрирования, пример 25

Основание цилиндра: $D:\begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2=R^2. \end{cases}$

Вычисляем объем тела по формуле (31):

$$V=\int_{-R}^{R}dx\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{H}{R}ydy=2\frac{H}{R}\int_{0}^{R}dx\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}ydy=\frac{H}{R}\int_{0}^{R}dx\,y^2\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\frac{H}{R}\int_{0}^{R}(R^2-x^2)dx=\frac{H}{R}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=\frac{H}{R}\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{2}{3}HR^2.$$

По формуле (32):

$$V=\int_{0}^{R}dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{H}{R}ydx=\frac{H}{R}\int_{0}^{R}ydy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}dx=2\frac{H}{R}\int_{0}^{R}y\sqrt{R^2-y^2}dy=$$

$$=-\frac{H}{R}\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-y^2}d(R^2-y^2)=-\frac{2}{3}\frac{H}{R}\left(R^2-y^2\right)^{3/2}\Big|_0^R=\frac{2}{3}\frac{H}{R}R^{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}HR^2.$$

8.3.2. Полярная система координат

Пусть уравнение поверхности $z=f(x;y)$ и область D заданы в полярной системе координат (рис. 34). Используя соотношения между декартовыми и полярными координатами:

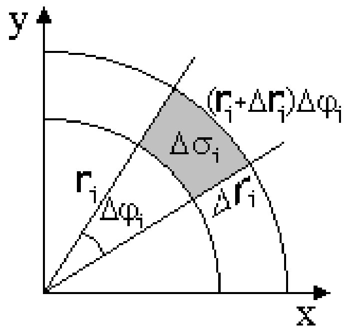


Рис. 34. Полярная система координат

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

и формулу для площади сектора $S_{\text{сек}}=\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$, получим выражение для элемента площади:

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\varphi_i - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i =$$

$= \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2} \right) \Delta r_i \Delta\varphi_i \approx r_i \Delta r_i \Delta\varphi_i$, или, переходя к бесконечно малым: $d\sigma = r dr d\varphi$.

Отсюда следует, что:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big) r dr d\varphi = \iint_{D'} F(r,\varphi) r dr d\varphi \quad (33)$$

Величина r, появившаяся в интеграле, является функцией перехода от декартовой системы координат к полярной. Можно получить общее выражение для этой функции при переходе от декартовых координат (x,y) к произвольным криволинейным координатам (u,v).

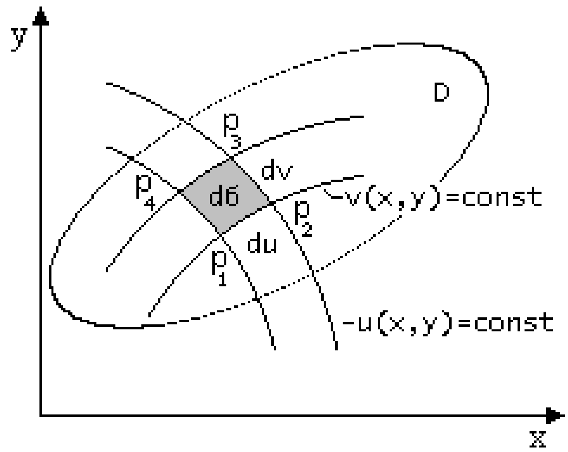


Рис. 35. Элемент площади

Предположим, что функции $x(u,v)$ и $y(u,v)$, задающие однозначное соответствие между координатами (x,y) и (u,v) - непрерывные и гладкие. Найдем связь между элементом площади в декартовой $(dxdy)$ и криволинейной $(dudy)$ системах координат. Так как элемент площади (рис. 35) является параллелограммом при $du \to 0$ и $dv \to 0$, то:

$$d\sigma = 2d\sigma_{p_1p_2p_3}, \qquad d\sigma_{p_1p_2p_3} = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{p_1p_2} \times \overrightarrow{p_1p_3} \right|, \quad \Rightarrow \quad d\sigma = \left| \overrightarrow{p_1p_2} \times \overrightarrow{p_1p_3} \right|$$

где

$$\overrightarrow{p_1 p_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0\},$$
$$\overrightarrow{p_1 p_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0\}.$$

Предположим, что $x_1 = x(u,v)$ и $y_1 = y(u,v)$, тогда:

$$\begin{cases} x_2 = x(u,v) + \dfrac{\partial x}{\partial u}du \\ x_3 = x(u,v) + \dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv \\ x_4 = x(u,v) + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_2 = y(u,v) + \dfrac{\partial y}{\partial u}du \\ y_3 = y(u,v) + \dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv \\ y_4 = y(u,v) + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv \end{cases}.$$

Подставляя эти выражения в координаты векторов, и вычисляя векторное произведение, получим:

$$d\sigma = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \left|\vec{\mathbf{k}}\left((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial u}du\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) - \frac{\partial y}{\partial u}du\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|dudv = J(u,v)dudv,$$ где: $$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

– определитель Якоби, или якобиан перехода от прямоугольных (x,y) к криволинейным (u,v) координатам.

Определитель Якоби обладает свойством:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

и при переходе от декартовых к полярным координатам имеет вид:

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Отсюда следует связь между элементами площади в декартовой и полярной системах координат $dxdy = rdrd\varphi$, которая уже использовалась нами при получении формулы (33).

При вычислении двойного интеграла в полярной системе координат необходимо выделить два случая (рис. 36):

1. Полюс (начало координат) находится вне области D, ограниченной (рис. 36), радиальными прямыми $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и кривыми $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$.

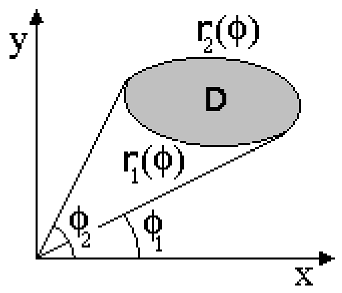


Рис. 36. Полюс (начало координат) находится вне области *D*

В этом случае формула (33) после расстановки пределов принимает вид:

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \,. \qquad (34)$$

2. Полюс находится внутри области D, то есть область начинается на луче $\varphi=0$, заканчивается на луче $\varphi = 2\pi$. Чтобы расставить пределы по переменной r, зададим радиус-вектор при $\varphi = 0$ и будем поворачивать его против часовой стрелки. Очевидно, что при таком движении конец радиус-вектора будет описывать кривую $r(\varphi)$. Отсюда следует, что переменная r меняется от 0 до $r(\varphi)$ (Рис. 37):

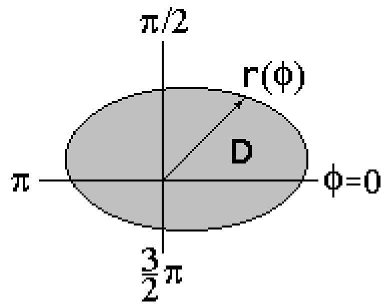


Рис. 37. Полюс находится внутри области *D*

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \qquad (35)$$

Пример 26. Вычислить $I = \iint\limits_D d\sigma$, где $D: \begin{cases} r = a\cos\varphi \\ \varphi = 0 \end{cases}$.

Решение. Область *D* (рис. 35) представляет собой часть круга радиуса, а с центром в точке (а,0). Для вычисления интеграла воспользуемся формулой(35).

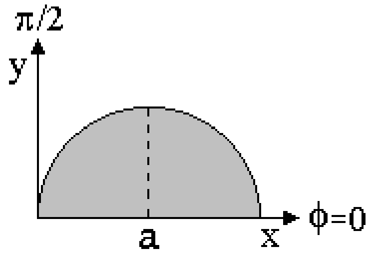


Рис. 38. Область интегрирования, пример 26.

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r\sin\varphi r dr = \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r^2 dr =$$
$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi\, r^3\Big|_0^{a\cos\varphi} = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi =$$
$$= -\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi d\cos\varphi = -\frac{a^3}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{12}.$$

Результат означает, что объем цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = r\sin\varphi$, с основанием, изображенным на рис. 38, равен $a^3/12$ единиц объема.

Пример 27. Вычислить объем шара радиуса а.

Решение. Представим верхнюю половину шара как цилиндрическое тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y)$, в основании которого лежит круг радиуса а (см. рис. 39).

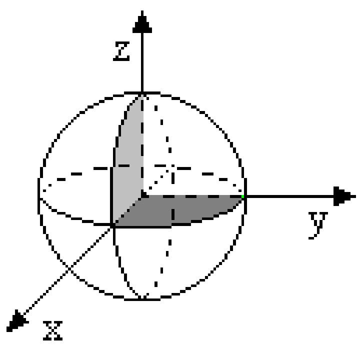


Рис. 39. Шар

Тогда объем шара можно вычислить с помощью двойного интеграла:

$$V = 2\iint\limits_D z(x,y)dxdy, \qquad D: \left\{ x^2 + y^2 = a^2 \right. .$$

Уравнение поверхности $z=f(x,y)$, получим из уравнения сферы:

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (рис. 36), так как нас интересует часть сферы с z>0. Расставляя пределы интегрирования (рис. 40), получим, что объем шара в декартовой системе координат равен:

$$V = 2\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = 2\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dy .$$

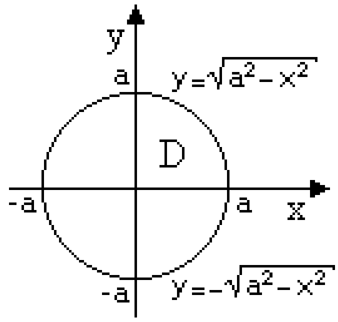


Рис. 40. Пределы интегрирования двойного интеграла, пример 27

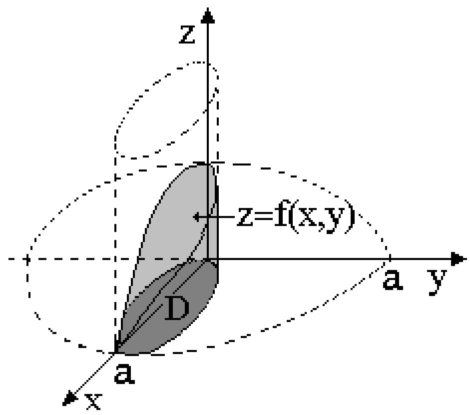
Полученное выражение можно значительно упростить переходом к полярным координатам:

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\; \Rightarrow \;\; z = \sqrt{a^2 - r^2} \;\; \Rightarrow V = 2\iint\limits_D \sqrt{a^2 - r^2}\, rd\varphi dr =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, rdr = -2\pi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, rd\left(a^2 - r^2\right) = -\frac{4}{3}\pi\left(a^2 - r^2\right)\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3 .$$

В последнем выражении учтено, что интегралы по переменным φ и r не зависят друг от друга и, следовательно, их можно вычислять отдельно в любой последовательности.

Пример 28. Вычислить объем тела, вырезанного из полушария радиуса **a** цилиндром, диаметр которого равен радиусу шара, а одна из образующих совпадает с осью полушария (тело Вивиани (рис. 41).



Рис/ 41. Тело Вивиани

Решение. Очевидно, что искомый объем, можно представить с помощью двойного интеграла от функции $z = f(x,y)$, которая, представляет собой верхнюю часть сферы: $z=+\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

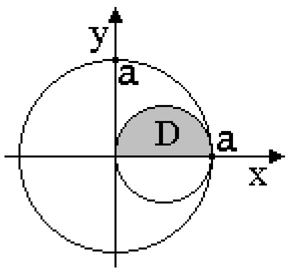


Рис. 42. Проекция цилиндра на плоскость

Так как проекция цилиндра на плоскость XOY (рис. 42) – круг радиусом a/2 с центром, сдвинутым по оси OX в точку x=a, то $D: \{x^2 + y^2 = ax$ и искомый объем равен:

$$V = 2\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 2\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy \text{ ед. куб.}$$

Вычисление интеграла также можно значительно упростить переходом к полярным координатам: $x^2 + y^2 = ax \;\Rightarrow\; r^2 = ar\cos\varphi \;\Rightarrow\; r = a\cos\varphi$,

$$V = 2\iint\limits_D \sqrt{a^2 - r^2}\, r\,d\varphi dr = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r d\left(a^2 - r^2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{a\cos\varphi} = -\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\left(a^3\sin^3\varphi - a^3\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}a^3\left[-\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}a^3\left[\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{2}{3}a^3\left[\frac{\pi}{2} + \left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2}\right] = .$$

$$= \frac{2}{3}a^3\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right] \text{ ед.куб.}$$

Пример 29. Вычислить интеграл Пуассона $\int_0^{\infty}\exp\left(-x^2\right)dx$.

Решение. Этот интеграл будет использоваться в курсе “Теория вероятности и математическая статистика”. Для его вычисления введем вспомогательный интеграл:

$$I = \iint_D \exp\left(-x^2 - y^2\right)dxdy \text{, где } D: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{cases}.$$

В полярной системе координат:

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \exp\left(-r^2\right)rdr = -\frac{\pi}{4}\int_0^R \exp\left(-r^2\right)d\left(-r^2\right) =$$

$$-\frac{\pi}{4}\exp\left(-r^2\right)\Big|_0^R = \frac{\pi}{4}\left[1 - \exp\left(-R^2\right)\right].$$

Теперь устремим радиус круга R (рис. 43) к бесконечности:

$$\lim_{R\to\infty}\iint_D \exp\left(-x^2 - y^2\right)dxdy = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{4}\left[1 - \exp\left(-R^2\right)\right] = \frac{\pi}{4}.$$

Так как x и y – независимые переменные, то:

$$\iint_{D(R\to\infty)} \exp\left(-x^2 - y^2\right)dxdy = \int_0^{\infty}\exp\left(-x^2\right)dx \cdot \int_0^{\infty}\exp\left(-y^2\right)dy = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty}\exp\left(-x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

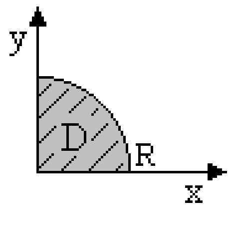


Рис. 43. Область интегрирования, пример 29

Пример 30. Вычислить значение двойного интеграла $\iint\limits_D \frac{dxdy}{y}$, где

$D:\left\{y = x,\ y = 2x,\ y = 1 - \frac{1}{2}x,\ y = 4 - 2x\right\}$.

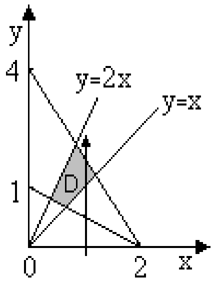


Рис. 44. Область интегрирования, пример 30

Решение. Попытка вычислить искомый интеграл в декартовой системе координат приведет к разбиению области *D* на три части (рис. 44) и, соответственно, к необходимости вычисления трех двойных интегралов. Поэтому введем новые криволинейные координаты $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x}, & 1 \le u \le 2 \\ v = \dfrac{y}{2 - x}, & \dfrac{1}{2} \le v \le 2, \end{cases}$

в которых область *D* (рис. 45), имеет форму прямоугольника, что значительно облегчает вычисление искомого интеграла.

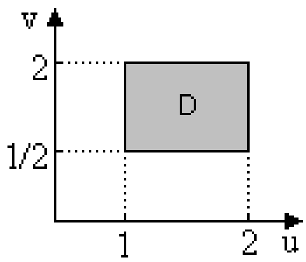


Рис. 45. Область интегрирования в криволинейных координатах, пример 30

Для перехода от декартовых координат (x,y) к криволинейным координатам (u,v) вычислим соответствующий Якобиан:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2v}{u+v} \\ y = \dfrac{2uv}{u+v} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{2v}{(u+v)^2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{2u}{(u+v)^2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{2v^2}{(u+v)^2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{2u^2}{(u+v)^2} \end{matrix}.$$

Используя формулу (9), получаем следующее выражение для Якобиана

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{4uv}{(u+v)^3},$$

с помощью которого можно легко вычислить искомый интеграл:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{y}=2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dv\int\limits_{1}^{2}\frac{du}{(u+v)^2}=-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dv\left(\frac{1}{u+v}\right)\Bigg|_1^2=2\ln\left(\frac{1+v}{2+v}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=2\ln\frac{5}{4}.$$

8.4. Приложения двойного интеграла

В этом разделе приведены геометрические и физические формулы, использующие понятие двойного интеграла.

8.4.1. Площадь плоской фигуры

Так как двойной интеграл представляет собой объем цилиндрического тела, то площадь основания этого тела D вычисляется при высоте цилиндра, равной единице, то есть при z=f(x,y)=1:

$$S=\iint\limits_D d\sigma=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_D rdrd\varphi \qquad (36)$$

Пример 31. Вычислить площадь круга радиуса a.

Решение. Используем формулу (36), причем в силу симметричности круга в качестве области D (рис. 46) берём четверть круга, а результат умножаем на четыре:

$$S=\iint\limits_D rdrd\varphi=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^a rdr=4\frac{\pi}{2}\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^a=\pi a^2.$$

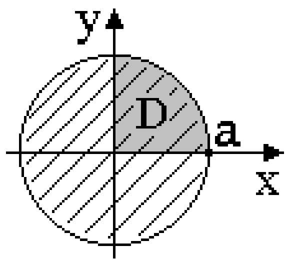


Рис. 46. Область интегрирования, пример 31

8.4.2. Площадь поверхности

Пусть ds – элемент поверхности z=f(x,y). Из рис. 42 видно, что элемент площади на плоскости XOY равен: $dxdy=ds\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между нормальным вектором $\vec{N}$ поверхности z=f(x,y) и осью OZ. Для определения угла φ используем скалярное произведение векторов $\vec{N}$ и $\vec{k}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\mathbf{N}}\cdot\vec{\mathbf{k}}}{\left|\vec{\mathbf{N}}\right|\left|\vec{\mathbf{k}}\right|},\quad \vec{\mathbf{k}} = \{0,\,0,1\},\quad \vec{\mathbf{N}} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\,-1\right\},$$

следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

и элемент площади поверхности равен:

$$ds = \frac{1}{\cos\varphi}dxdy = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dxdy,$$

а сама площадь поверхности определяется как абсолютная величина двойного интеграла, взятого по проекции D поверхности S на плоскость XOY:

$$S = \left|\iint\limits_D ds\right| = \left|\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot dxdy\right| \qquad (37)$$

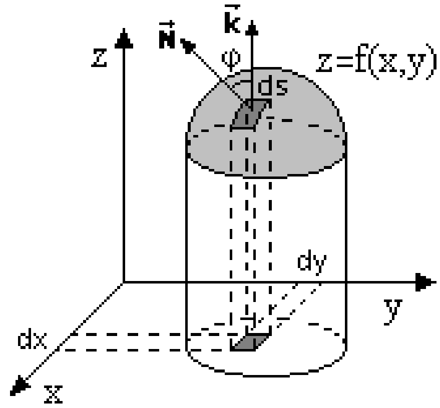


Рис. 47. Геометрическая интерпретация поверхности для вычисления ее площади

Пример 32. Найти площадь поверхности верхней части тела Вивиани.

Решение. Искомая поверхность описывается уравнением $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ (см. Пример 31), следовательно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad \Rightarrow$$

$$S = \iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1}\cdot dxdy = a\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

Так как область D – та же, что в примере 6, то, переходя к полярной системе координат, получим:

$$S = 2a\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -a\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{d\left(a^2 - r^2\right)}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -2a\int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{a^2 - r^2}\Big|_0^{a\cos\varphi}$$

$$-2a\int_0^{\pi/2} \left(a\sin\varphi - a\right)d\varphi = -2a^2\left(-\cos\varphi - \varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

8.4.3. Физические приложения двойного интеграла

1. Масса плоской пластинки произвольной формы с переменной плотностью:

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy = \iint\limits_D \rho(r, \varphi)rdrd\varphi,$$

где D – контур пластинки, $\rho(x, y)$ – функция плотности;

2. Координаты центра тяжести плоской пластинки произвольной формы:

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{M_x}{m}; \quad y_{\text{ц.т.}} = \frac{M_y}{m};$$

$$M_x = \iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy = \iint\limits_D \rho(r, \varphi)r^2\cos\varphi drd\varphi;$$

$$M_y = \iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy = \iint\limits_D \rho(r, \varphi)r^2\sin\varphi\, drd\varphi;$$

3. Момент инерции плоской пластинки произвольной формы относительно:

♦ Оси OZ: $$I_z = \iint\limits_D \rho(x, y)\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \iint\limits_D \rho(r, \varphi)\, r^3 drd\varphi$$

♦ Оси OX: $$I_x = \iint\limits_D \rho(x, y)\, y^2 dxdy = \iint\limits_D \rho(r, \varphi)\, r^3\sin^2\varphi\, drd\varphi$$

♦ Оси OY: $$I_y = \iint\limits_D \rho(x, y)\, x^2 dxdy = \iint\limits_D \rho(r, \varphi)\, r^3\cos^2\varphi\, drd\varphi$$

♦ Центробежный момент инерции:

$$I_{xy} = \iint\limits_D \rho(x, y)xydxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D \rho(r, \varphi)r^3\sin 2\varphi\, drd\varphi.$$

9. Приложения функции многих переменных в экономике

9.1. Статическая модель межотраслевой экономики

В основе всякого рационального функционирования хозяйства лежит идея сбалансированности, суть которой состоит в том, что все затраты должны компенсироваться доходами. При построении балансовых моделей за основу берется балансовый метод – взаимное сопоставление имеющихся ресурсов и потребностей в них.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение валового национального продукта по отраслям, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n «чистых» отраслей, т. е. производит только один продукт, совместное производство различных продуктов исключается. Различные отрасли выпускают разные продукты. Такими отраслями могут служить энергетика, машиностроение, станкостроение, приборостроение, сельское хозяйство и т.д.

Каждая отрасль выпускает некоторый продукт, часть которого потребляется другими отраслями (производственное потребление), а другая часть идет на конечное потребление и накопление (непроизводственное потребление).

Независимо от масштаба производства удельный выпуск и соотношение затрат предполагаются постоянными.

Валовый выпуск i-й отрасли, $i = 1,2,...,n$ обозначим через X_i; через x_{ij} – стоимость продукта, произведенного в i-й отрасли и потребленного в j-й отрасли для изготовления продукции стоимостью X_j; y_i– конечный продукт i-й отрасли, z_j – условно-чистая продукция j-й отрасли, $j = 1,2,...,n$. В самой модели величины y_i мыслятся как экзогенно заданные.

Величины X_i и y_i могут быть представлены в натуральных и стоимостных единицах измерения, в соответствии с этим различают натуральный и стоимостной межотраслевые балансы.

Рассмотрим основные соотношения межотраслевого баланса. Валовая продукция i-й производящей отрасли (X_i) равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \; i = 1,2,...,n. \qquad (38)$$

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \; i = 1,2,...,n, \; j = 1,2,...,n. \qquad (39)$$

Числа a_{ij} характеризуют технологию j-й отрасли. С учетом формулы (39) систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i, \; i = 1,2,...,n. \qquad (40)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых затрат $A=(a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции $X=(X_i)$ и вектор столбец конечной продукции $Y=(y_i)$, то *экономико-математическая модель межотраслевого баланса* примет вид

$$X = AX + Y. \tag{41}$$

Модель межотраслевого баланса часто называют моделью В. Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Заметим, что вывод уравнения (41) основан на двух важных допущениях. Первое допущение состоит в неизменности сложившейся технологии производства, когда элементы матрицы $A=(a_{ij})$ постоянны. Второе допущение состоит в предположении линейности существующих технологий, т.е. для выпуска j-й отраслью продукции объема x требуется ресурсов (продукции i-й отрасли) в количестве $a_{ij}x$ единиц.

Важным вопросом в рассматриваемой модели является вопрос о существовании решения матричного уравнения (41). В развернутой форме это система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которая является хорошо изученным объектом линейной алгебры. Однако система описывает отраслевую структуру экономики и, с учетом экономической интерпретации вектор производства $X=(X_i)$, элементы матрицы прямых затрат a_{ij}, объемы конечного спроса y_i должны быть неотрицательным. Поэтому говорят, что модель Леонтьева **продуктивна или работоспособна**, если уравнение (41) имеет неотрицательное решение для любого $Y \geq 0$, т.е. матрица коэффициентов прямых затрат A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления.

Теорема. Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда существует неотрицательная матрица$(E-A)^{-1}$, обратная к матрице $(E-A)$, где E– единичная матрица.

Доказывается также, что модель Леонтьева продуктивна, если она позволяет произвести хоть какой-нибудь строго положительный вектор потребления; из чего также следует, что можно произвести и любой неотрицательный вектор потребления.

Одним из признаков продуктивности матрицы A является следующий: если сумма элементов столбцов (строк) матрицы A не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов (одной из строк) сумма элементов строго меньше единицы, то матрица A продуктивна.

Из (41) следует, что $(E-A)X=Y$, откуда

$$X = (E-A)^{-1}Y. \tag{42}$$

Обозначим обратную матрицу как $B=(E-A)^{-1}=(b_{ij})$. Тогда $X=BY$. Это значит, что для любой i-й отрасли справедливо соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j, \; i = 1,2,...,n. \tag{43}$$

Коэффициент полных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли. Полные затраты отражают использование ресурса на всех этапах изготовления и равны сумме прямых и косвенных затрат на всех предыдущих стадиях производства продукции.

Таким образом, суть построения модели Леонтьева состоит в следующем:

1. Определить объем конечной продукции каждой отрасли, зная величины валовой продукции каждой отрасли по формуле

$$Y = (E - A)X.$$

2. Определить объем валового выпуска отраслей по заданному экзогенно конечному спросу на основе данных о технологических возможностях, воплощенных в расходных коэффициентах a_{ij} по формуле

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

3. Определить величины конечной продукции ряда отраслей и объемы валовой продукции остальных отраслей, зная величины валовой продукции первых отраслей и объемы конечной продукции остальных отраслей.

Валовая продукция j-й потребляющей отрасли X_j равна сумме ее материальных затрат $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ и условно чистой продукции z_j:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j, \quad j = 1,2,...,n. \qquad (44)$$

Тогда межотраслевой баланс можно представить таблицей 1.

Таблица 1

Произво-дящие отрасли	**Потребляющие отрасли**				**Конечный продукт**	**Валовый продукт**
	1	**2**	**...**	**n**		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	X_2
...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	X_n
Условно-чистая продукция	z_1	z_2	...	z_n	$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{n} y_i$	
Валовый продукт	X_1	X_2	...	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i$

Таблица межотраслевого баланса состоит из четырех квадрантов. Первый квадрант (светло-бирюзовый) отражает межотраслевые потоки продукции. Второй (бледно-зеленый) характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода. Третий (светло-желтый) представляет национальный доход как стоимость условно-чистой продукции. Четвертый квадрант (серый) показывает конечное распределение и использование национального дохода.

Основной недостаток построенной статической модели межотраслевого баланса состоит в том, что модель не позволяет установить связи между планами производства отраслей и планами капитальных вложений, обеспечивающих развитие этих отраслей, т.е. модель не учитывает динамику самой экономики.

Пример 33. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для проверки продуктивности модели просуммируем элементы каждой строки матрицы A. Получим

0,3 + 0,1 + 0,4 = 0,8;

0,2 + 0,5 = 0,7;

0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,6.

Поскольку суммы элементов каждой строки меньше единицы, то модель межотраслевого баланса продуктивна.

Определим коэффициенты полных материальных затрат.

Находим матрицу $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & 0,0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$, используя известные методы высшей математики. Получим

$$B = \begin{pmatrix} 2,04 & 0,61 & 1,02 \\ 0,82 & 2,24 & 0,41 \\ 0,87 & 0,51 & 1,68 \end{pmatrix}.$$

Определим величины валовой продукции трех отраслей, используя процедуру умножения матрицы на вектор:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 2,04 & 0,61 & 1,02 \\ 0,82 & 2,24 & 0,41 \\ 0,87 & 0,51 & 1,68 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775,5 \\ 510,2 \\ 729,6 \end{pmatrix}.$$

Для определения элементов матрицы межотраслевых потоков продукции воспользуемся формулой

$$x_{ij} = a_{ij} X_j, \; i = 1,2,...,n, \; j = 1,2,...,n,$$

вытекающей из (39). Тогда получим

$x_{11} = a_{11} X_1 = 0,3 \cdot 775,5 = 232,65$;

$x_{12} = a_{12} X_2 = 0,1 \cdot 510,2 = 51,02$;

$x_{13} = a_{13} X_3 = 0,4 \cdot 729,6 = 291,84$;

$x_{21} = a_{21} X_1 = 0,2 \cdot 775,5 = 155,10$;

$x_{22} = a_{22} X_2 = 0,5 \cdot 510,2 = 255,10$;

$x_{23} = a_{23} X_3 = 0 \cdot 729,6 = 0$;

$x_{31} = a_{31} X_1 = 0,3 \cdot 775,5 = 232,65$;

$x_{32} = a_{32} X_2 = 0,1 \cdot 510,2 = 51,02$;

$x_{33} = a_{33} X_3 = 0{,}2 \cdot 729{,}6 = 145{,}92$.

Из (44) следует, что условно-чистая продукция j-й потребляющей отрасли z_j равна разности валовой продукции за вычетом суммы ее материальных затрат, т.е.

$$z_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad j = 1,2,...,n.$$

Тогда находим компоненты вектора условно-чистой продукции Z:

$$z_1 = X_1 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}) = 775{,}5 - (232{,}65 + 155{,}10 + 232{,}65) = 155{,}10;$$

$$z_2 = X_2 - (x_{12} + x_{22} + x_{32}) = 510{,}2 - (51{,}02 + 255{,}10 + 51{,}02) = 153{,}06;$$

$$z_3 = X_3 - (x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 729{,}6 - (291{,}84 + 0 + 145{,}92) = 291{,}84.$$

9.2. Моделирование динамики экономической системы

Простейшую модель производства можно представить, как некоторую систему, перерабатывающую различные виды ресурсов в готовую продукцию (рис. 48).

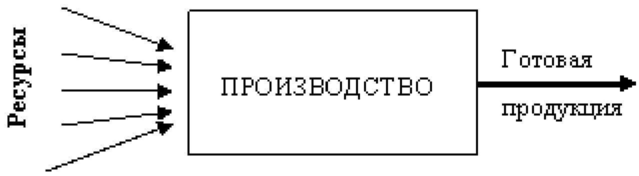


Рис. 48. Упрощенная модель производства

В качестве ресурсов могут выступать:

- сырье;
- трудовые затраты;
- энергозатраты;
- научно-исследовательские ресурсы;
- технологические ресурсы;
- транспортные ресурсы и др.

Производственной функцией называется зависимость между объёмом произведённой продукции y, и затратами различных видов ресурсов, необходимых для выпуска этой продукции $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

На практике для упрощения модели часто используют *двухфакторную* производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, включающую два вида ресурсов:

1) материальные x_1, включающие затраты сырья, энергии, транспортные и др. ресурсы;

2) трудовые ресурсы x_2.

Производственная функция должна удовлетворять ряду ***требований***:

1. Без затрат ресурсов нет выпуска: $f(x_1, 0) = 0$, $f(0, x_2) = 0$.

2. С увеличением затрат любого из ресурсов выпуск растёт, т.е. производственная функция должна быть возрастающей по любому из факторов.

3. *Закон убывания эффективности*: при одних и тех же абсолютных увеличениях затрат любого из ресурсов Δx прирост объёма производства Δy тем меньше, чем больше выпуск продукции. Другими словами, производственная функция должна быть вогнутой (выпуклой вверх) по каждому аргументу (см. рис. 49).

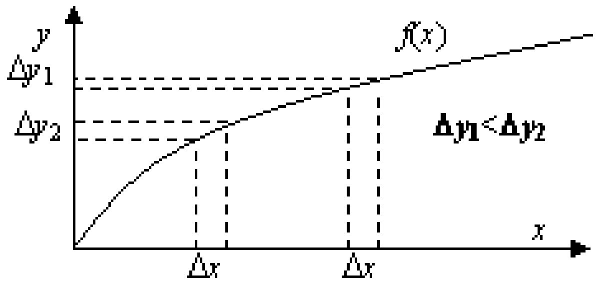


Рис. 49. Закон убывания эффективности

Оценим основные характеристики производственной функции. Зная производственную функцию, можно рассчитать ряд числовых характеристик. Рассмотрим основные из них.

1. *Средней производительностью* по каждому ресурсу называются величины:

$$A_1 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1},\ A_2 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2},$$

которые имеют смысл среднего выпуска продукции из расчета единичных затрат данного ресурса.

Если x_1 – материальные затраты, а x_2 – трудовые, то A_1 называется *капиталоотдачей,* а A_2 называется *производительностью труда.*

2. *Предельной или маржинальной производительностью* по каждому ресурсу называются величины:

$$M_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1},\ M_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Эти величины показывают приближённо, насколько единиц изменится выпуск, если затраты того или иного ресурса изменятся на единицу:

$$M_1 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_1},\ M_2 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_2}.$$

3. *Частной эластичностью* по каждому ресурсу называются величины:

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1},\ E_2 = \frac{M_2}{A_2}.$$

Эластичности приближенно показывают, насколько процентов изменится выпуск, если затраты того или иного ресурса изменятся на один процент:

$$E_1 \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x_1 / x_1},\ E_2 \approx \frac{\Delta y / y}{\Delta x_2 / x_2}.$$

Величина $E = E_1 + E_2$ называется полной эластичностью или *эластичностью производства*.

4. *Технологической нормой замены* называется величина $R_{12} = \frac{E_1 x_2}{E_2 x_1}$, которая приближенно показывает, как изменится выпуск, если единицу одного ресурса заменить единицей другого.

Пример 34. Производственная функция имеет вид $y = a\sqrt{x_1} \cdot \ln(bx_2)$. Найти средние и предельные производительности, эластичности, технологическую норму замены.

Решение. Средние производительности равны:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{a\sqrt{x_1} \cdot \ln(bx_2)}{x_1} = \frac{a \cdot \ln(bx_2)}{\sqrt{x_1}},\ A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{a\sqrt{x_1} \cdot \ln(bx_2)}{x_2}.$$

Предельные производительности равны:

$$M_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{a \cdot \ln(bx_2)}{2\sqrt{x_1}},\ M_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{a\sqrt{x_1}}{x_2}.$$

Эластичности равны:

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = \frac{1}{2},\ E_2 = \frac{M_2}{A_2} = \frac{1}{\ln(bx_2)},\ E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln(bx_2)}.$$

Технологическая норма замены есть

$$R_{12} = \frac{E_1 x_2}{E_2 x_1} = \frac{x_2 \ln(bx_2)}{2x_1}.$$

На практике при моделировании реальных производств чаще всего используют два вида производственных функций: линейную и Кобба-Дугласа.

Линейная производственная функция имеет вид:

$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$.

Она строится в случаях, когда объем выпуска пропорционален затратам. Однако данная функция не удовлетворяет первому и третьему требованиям к производственным функциям, поэтому ее можно использовать для приближения реальных функций на небольших локальных участках изменения их аргументов. Для выполнения второго требования необходимо выполнение условий $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \tag{44}$$

Для выполнения всех требований к производственным функциям необходимо выполнение условий:

$$A > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1. \tag{45}$$

Найдем средние и предельные производительности, эластичности, технологическую норму замены для линейной и Кобба-Дугласа производственных функций.

Для линейной функции $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ будет:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{x_1},\ A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{x_2};$$

$$M_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1,\ M_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2;$$

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = \frac{a_1 x_1}{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2},\ E_2 = \frac{M_2}{A_2} = \frac{a_2 x_2}{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2},$$

$$E = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2},\ R_{12} = \frac{E_1 x_2}{E_2 x_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Таким образом, коэффициенты a_1 и a_2 линейной производственной функции имеют смысл предельных производительностей и их можно вычислять по формулам:

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1},\ a_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x_2}. \tag{46}$$

Для производственной функции Кобба-Дугласа $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$ будет:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = A \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta},\ A_2 = \frac{y}{x_2} = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1};$$

$$M_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = A \cdot \alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{\beta},\ M_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = A \cdot \beta \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta-1};$$

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = \alpha,\ E_2 = \frac{M_2}{A_2} = \beta,\ E = \alpha + \beta;$$

$$R_{12} = \frac{E_1 x_2}{E_2 x_1} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

Таким образом, коэффициенты α и β производственной функции Кобба-Дугласа имеют смысл частных эластичностей и их можно вычислять по формулам:

$$\alpha = \frac{\Delta y / y}{\Delta x_1 / x_1},\ \beta = \frac{\Delta y / y}{\Delta x_2 / x_2}. \tag{47}$$

Пример 35. Некоторое предприятие, затрачивая для производства 65 единиц материальных затрат и 17 трудовых, выпускало 120 единиц продукции. В результате расширения и увеличении материальных затрат до 68 единиц выпуск возрос до 124 единиц, а при увеличении трудозатрат до 19 единиц выпуск вырос до 127 единиц. Составить линейную производственную функцию и функцию Кобба-Дугласа.

Решение. Записав для удобства исходные данные в виде таблицы, рассчитываем параметры производственных функций.

x_1	65	68	–
x_2	17	–	19

y	120	124	127

Линейная функция $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$. Для нахождения параметров a_1 и a_2 используем формулу (46):

$$a_1 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{124 - 120}{68 - 65} = \frac{4}{3}, \quad a_2 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x_2} = \frac{127 - 124}{19 - 17} = \frac{3}{2}.$$

Получаем $y = a_0 + \frac{4}{3} x_1 + \frac{3}{2} x_2$. Для нахождения a_0 подставляем в уравнение исходные данные из 2-го столбца таблицы: $120 = a_0 + \frac{4}{3} \cdot 65 + \frac{3}{2} \cdot 17$. Решаем уравнение относительно a_0, получаем $a_0 = -17{,}7$. В итоге получаем линейную производственную функцию $y = -17{,}7 + \frac{4}{3} x_1 + \frac{3}{2} x_2$.

Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид $y = A \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$. По формуле (47) находим коэффициенты уравнения: $\alpha \approx \frac{(124 - 120)/124}{(68 - 65)/68} = 0{,}73$,

$$\beta = \frac{(124 - 120)/124}{(19 - 17)/19} = 0{,}22.$$

Получаем уравнение вида $y = A \cdot x_1^{0,73} \cdot x_2^{0,22}$. Для нахождения A подставляем в уравнение исходные данные из 2-го столбца таблицы: $120 = A \cdot 65^{0,73} \cdot 17^{0,22}$. Вычисляя, получаем $A = \frac{120}{21{,}06 \cdot 1{,}87} = 3{,}05$. В результате, производственная функция имеет вид: $y = 3{,}05 \cdot x_1^{0,73} \cdot x_2^{0,22}$.

9.3. Модель экономического роста Солоу

Производственная функция Кобба-Дугласа обычно записывается в виде

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta},$$

где

Y – выпуск продукции,

A – производственный коэффициент,

K – объем используемого капитала,

L – затраты живого труда.

Неоклассическая модель экономического роста Роберта Солоу основывается на производственной функции Кобба-Дугласа. Основное отличие модели Солоу от производственной функции заключается в том, что в уравнение вводится технический прогресс как фактор экономического роста наравне с такими факторами производства как труд и капитал.

Величина технического прогресса зависит от времени и вводится в производственную функцию в виде сомножителя $e^{\gamma \cdot \Delta t}$, где величина γ характеризует степень технического прогресса, а величина Δt – время, прошедшее с начала процесса прогнозирования. Тогда производственная функция представляется в виде

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^{\gamma \cdot \Delta t}.$$

Модель описывает влияние трех вышеупомянутых факторов на экономический рост и описывается мультипликативной производственной функцией, составляющей основу модели, и рядом условий и ограничений.

Под техническим прогрессом в данной модели подразумевается вся совокупность качественных изменений труда и капитала. Таким образом, показатель технического прогресса является показателем времени. Технический прогресс является нейтральным, так как он одинаково влияет на все задействованные для выпуска продукции ресурсы.

При $\gamma = 0$ технический прогресс отсутствует, и мы получаем производственную функцию Кобба-Дугласа.

Определим параметры производственной функции. Предположим, что исходные временные ряды деятельности хозяйственной системы за период с t_0 по t_n годы заданы в виде табл. 2.

Таблица 2

Годы	**Капитал**	**Труд**	**ВВП**
t_0	K_0	L_0	Y_0
t_1	K_1	L_1	Y_1
t_2	K_2	L_2	Y_2
…	…	…	…
t_n	K_n	L_n	Y_n

Из табл. 2 следует, что капитал, труд и ВВП изменяются с течением времени, при этом переменные капитал и труд являются независимыми, а переменная ВВП зависит от них, однако, отсутствует формула, связывающая между собой указанные переменные. Такая зависимость называется статистической. Согласно теории соответствующая математическая модель может быть представлена производственной функцией Кобба-Дугласа с учетом технического прогресса (модель Солоу)

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^{\gamma(t - t_0)}.$$

Неизвестными в этой функции являются параметры A, α, β, γ, которые должны удовлетворять условиям (45). Прологарифмируем производственную функцию

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \gamma(t - t_0).$$

Введем обозначения:

$$x_1 = \ln K,\ x_2 = \ln L,\ x_3 = t - t_0,\ y = \ln Y,\ a = \ln A.$$

Тогда в этих обозначениях получим линейную функцию относительно неизвестных a, α, β, γ:

$$y = a + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3. \tag{48}$$

Значения величин x_1, x_2, x_3 и y известны для любого года t от t_0 до t_n, т.е. для любой строки табл. 2.

Как правило, неизвестные определяются с помощью метода наименьших квадратов, суть которого состоит в следующем. Неизвестные параметры выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов разностей между левой и правой частями уравнения (48) была бы минимальной

Рассмотрим показатели, характеризующие динамику производственной системы. С учетом развития системы производственная функция в год t характеризуется уравнением, содержащим явную зависимость показателей от времени:

$$Y_t = A \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{\beta} \cdot e^{\gamma(t-t_0)}. \tag{49}$$

Наряду с такими показателями, как капитал K_t, труд L_t и выпуск продукции Y_t к основным показателям относятся также фонд накопления S_t и фонд потребления C_t. Эти фонды зависят от нормы накопления s_t за время $t-t_0$. Обычно рассматривается линейная или экспоненциальная политика изменения нормы накопления, которые имеют вид

$$s_t = s_0 + h \cdot (t - t_0) \tag{50}$$

или

$$s_t = s_0 e^{h \cdot (t-t_0)} \tag{51}$$

соответственно. Здесь s_0 и h – некоторые постоянные параметры, характеризующие величину нормы накопления.

Фонд накопления равен произведению нормы накопления s_t на значение производственной функции Y_t:

$$S_t = s_t \cdot Y_t. \tag{52}$$

Фонд потребления равен разности между значением производственной функции и фондом накопления

$$C_t = Y_t - S_t. \tag{53}$$

К дополнительным показателям относятся:

- фондовооруженность труда $\frac{K_t}{L_t}$,
- производительность труда $\frac{Y_t}{L_t}$,
- отдача капитала $\frac{Y_t}{K_t}$,
- среднедушевое потребление $\frac{C_t}{L_t}$.

Указанные основные и дополнительные показатели на каждый год прогнозируемого периода рассчитываются рекуррентно на основе соотношений 50)–(53), а также формул для дополнительных показателей.

9.4. Моделирование потребительского спроса

В условиях рыночной системы управления производственной и сбытовой деятельностью предприятий и фирм в основе принятия хозяйственных решений лежит рыночная информация, а обоснованность решений проверяется рынком в ходе реализации товаров и услуг. При таком подходе начальным пунктом всего цикла предпринимательской деятельности становится изучение потребительского спроса.

Рассмотрим вопрос о построении функции потребительского спроса на основе гипотез количественного измерения полезности (так называемая, кардиналистская концепция). Данная концепция основана на трех гипотезах.

Гипотеза 1. Потребитель может выразить свое желание приобрести некоторое благо посредством количественной оценки его полезности.

Единица, служащая потребителю масштабом измерения полезности, получила название ютила (utility — полезность). Оценки полезности субъективны, поэтому нельзя складывать ютилы, приписываемые одному и тому же благу различными потребителями. Но каждый отдельный потребитель проводит с оценками полезности все математические операции, которые применимы к числам. Зависимость между полезностью, получаемой потребителем, и количеством потребляемых им благ называют функцией полезности.

Из гипотезы 1 следует, что каждый вид благ имеет для потребителя общую и предельную полезность. Общая полезность некоторого вида благ есть сумма полезностей всех имеющихся у потребителя единиц этого блага. Так, общая полезность 10 яблок равна сумме ютилов, которые потребитель приписывает каждому яблоку. Как изменяется величина общей полезности блага по мере увеличения его количества?

Для ответа на этот вопрос используется вторая гипотеза.

Гипотеза 2. Предельная полезность блага убывает, т.е. полезность каждой последующей единицы определенного вида благ, получаемой в данный момент, меньше полезности предыдущей единицы. Это утверждение, получившее название «первый закон Госсена», исходит из

того, что потребности людей насыщаемы.

Если предположения о возможности количественного измерения полезности и убывании ее предельной величины соответствуют действительности, то это означает, что в основе плана потребления индивида лежит составленная им таблица, в которой каждая единица потребляемых благ имеет количественную оценку полезности. Примером такой таблицы служит табл. 3.1, названная по имени первого ее составителя таблицей Менгера.

Таблица 3

Номер порции	**Вид блага**		
	хлеб	**молоко**	**сахар**
1	15	12	10
2	10	11	8

Номер порции	Вид блага		
	хлеб	молоко	сахар
3	8	10	6
4	7	7	3
5	5	6	1

Согласно этой таблице полезность первого кг хлеба равна 15 ед., второго – 10 ед., третьего – 8 ед., и т.д., т.е. полезность каждого последующего кг уменьшается. Это предельные полезности. Полезность трех кг хлеба равна сумме 15 + 10 + 8 = 33 ед. Это общая полезность.

Гипотеза 3. Потребитель так расходует свой бюджет, чтобы получить максимум полезности от совокупности приобретенных благ.

В соответствии с гипотезой 3 потребитель, ориентируясь на свою таблицу Менгера, с учетом заданных цен формирует такой ассортимент покупок, который при его бюджете дает максимальную общую полезность.

Для достижения этой цели потребитель должен руководствоваться вторым законом Госсена, который гласит: максимум полезности обеспечивает такая структура покупок, при которой отношение предельной полезности (U_i) блага к его цене (p_i) одинаково для всех благ:

$$\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} = ... = \frac{U_n}{p_n}. \qquad (54)$$

Пример 36. Допустим, что индивид, таблица полезности которого совпадает с табл. 2.0, имеет 252 руб. На эти деньги он купил 3 кг хлеба по цене 20 руб. за 1 кг, 4 л молока по цене 28 руб. за 1 л и 2 кг сахара по цене 40 руб. за 1 кг.

Решение. По табл. 3 легко подсчитать, что общая полезность всего набора купленных благ составит

$$15 + 10 + 8 + 12 + 11 + 10 + 7 + 10 + 8 = 91 \text{ ед.}$$

Проверим, соответствует ли такая структура расходов второму закону Госсена. При указанных количествах купленных благ предельная полезность хлеба для индивида равна 8, молока — 7 и сахара — 8 ед. Поделим предельные полезности на цены благ: 8/20 = 0,4; 7/28 = 0,25; 8/40 = 0,2. Несоблюдение условия (3.1) свидетельствует о возможности увеличения общей полезности расходов бюджета индивида. Если отказаться от 2-го кг сахара и на сэкономленные деньги купить еще 2 кг хлеба, то условие (3.1) будет соблюдено: 5/20 = 7/28 = 10/40 = 0,25. В результате общая полезность нового набора купленных благ возросла

$$15 + 10 + 8 + 7 + 5 + 12 + 11 + 10 + 7 + 10 = 95 \text{ ед.}$$

Рассмотрим целевую функцию потребления (уровень полезности). Уровень удовлетворения потребностей потребителя обозначим через U (Utility – полезность). Предположим, что имеется *n* видов благ $Б_1, Б_2, ..., Б_n$. В качестве благ могут выступать:

- продовольственные товары;
- товары первой необходимости;
- товары второй необходимости;

- предметы роскоши;
- платные услуги и т.д.

Потребитель в процессе своего существования потребляет некоторые из перечисленных благ. Пусть количество потребляемого блага i-го вида равно x_i, $i = 1,2,...,n$.

Целевой функцией потребления называется зависимость между степенью (уровнем) удовлетворения потребностей U и количеством потребляемых благ: $x_1, x_2,..., x_n$. Эта функция имеет вид:

$$U = U(x_1, x_2,..., x_n).$$

В пространстве потребительских благ каждой постоянной величине C соответствует определенная поверхность равноценных, или безразличных, наборов благ, которая называется *поверхностью безразличия*:

$$U(x_1, x_2,..., x_n) = C.$$

Предельной полезностью i-го блага называется частная производная $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ от функции потребления $U(x_1, x_2,..., x_n)$ по i-му аргументу. Это определение является обобщением понятия предельной полезности из п. 3.2.1 в случае дискретной функции полезности. Предельная полезность является убывающей функцией, что соответствует гипотезе 2.

Для наглядности рассмотрим пространство двух благ, например, в виде двух агрегированных групп товаров: продукты питания $Б_1$ и непродовольственные товары, включая платные услуги $Б_2$. Тогда уровни целевой функции потребления $U(x_1, x_2)$ можно изобразить на плоскости в виде кривых безразличия $U(x_1, x_2) = C$, соответствующих различным значениям константы C. Для этого можно выразить количество потребления одного блага x_2 через другое x_1. Рассмотрим пример.

Пример 37. Целевая функция потребления имеет вид $U = \sqrt[3]{x_1 x_2}$. Найти кривые безразличия.

Решение. Кривые безразличия имеют вид $\sqrt[3]{x_1 x_2} = C$, или $x_1 x_2 = C^3$. Откуда $x_2 = \frac{C^3}{x_1}$. При этом следует отметить, что должны выполняться неравенства $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Кривые безразличия показаны на рис. 50.

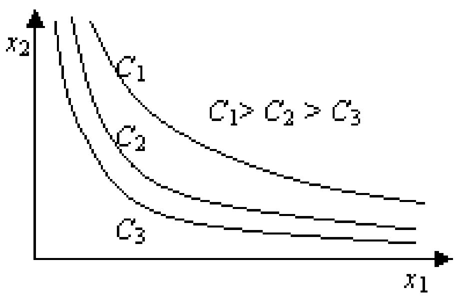


Рис. 50. Кривые безразличия для примера 37

Построим математическую модель спроса. Каждый потребитель стремится максимизировать уровень удовлетворения потребностей, то есть $U \to \max$. Однако, максимизации степени удовлетворения потребностей будут мешать возможности потребителя. Обозначим цену на единицу каждого блага через $p_1, p_2, ..., p_n$ (price - цена), а доход потребителя через D. Тогда должно выполняться *бюджетное ограничение,* имеющее смысл закона, согласно которому затраты потребителя не должны превышать сумму дохода:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n \le D.$$

В результате, для нахождения оптимального набора благ необходимо решить задачу оптимального программирования:

$$U(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{55}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n \le D \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0 \end{cases}. \tag{56}$$

Рассмотрим двухфакторную функцию потребления $U(x_1, x_2)$, где x_1 – объем потребления продуктов питания и x_2 – потребление непродовольственных товаров и платных услуг. Кроме того, предположим, что весь доход потребитель направляет на удовлетворение своих потребностей. В этом случае бюджетное ограничение будет содержать только два слагаемых, и неравенство превратится в равенство. Задача оптимального программирования при этом примет вид:

$$U(x_1, x_2) \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 = D \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Геометрически оптимальное решение имеет смысл точки касания кривой безразличия линии, соответствующей бюджетному ограничению (рис. 51).

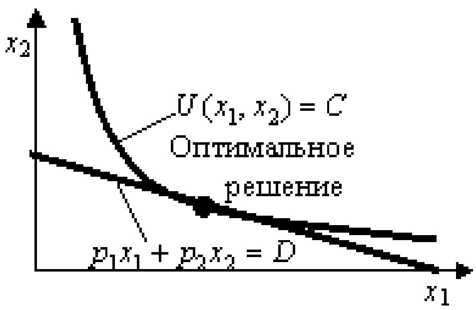


Рис. 51. Геометрический смысл оптимального решения

Таким образом, количество спрашиваемого индивидом блага зависит от цен благ $p_1, p_2, ..., p_n$ и бюджета индивида D:

$$x_i = x_i(p_1, p_2, ..., p_n, D), \ i = 1,2,...,n.$$

Когда все факторы, определяющие объем спроса на благо, кроме его цены, постоянны, функция спроса принимает частный вид *функции спроса по цене*:

$x_i = x_i(p_i)$. Объем спроса на благо при постоянных ценах в зависимости от дохода принимает частный вид *функции спроса по доходу*: $x_i = x_i(D)$.

Чтобы узнать, какая структура покупок обеспечивает потребителю максимум полезности, нужно решить задачу оптимизации (55) – (56). С этой целью составим функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = U(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n - D),$$

вычислим частные производные по всем ее аргументам и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ ... \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = \dfrac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0 \end{cases}, \qquad (57)$$

а также

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n - D) = 0. \qquad (58)$$

Из уравнений системы (56) следует, что

$$\frac{\partial U / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial U / \partial x_2}{p_2} = ... = \frac{\partial U / \partial x_n}{p_n} = \lambda. \qquad (59)$$

Уравнение (58) представляет собой уравнение границы бюджетного множества, определяемого системой неравенств (56).

Так как в числители каждой дроби стоит предельная полезность соответствующего блага, то равенство (3.6) представляет собой второй закон Госсена: максимальная полезность достигается в том случае, когда предельные полезности благ пропорциональны их ценам.

Определим функцию потребительского спроса. Предположим, что функция полезности имеет вид

$$U = (x_1 + c_1)^{\alpha_1} (x_2 + c_2)^{\alpha_2} ... (x_n + c_n)^{\alpha_n}, \qquad (60)$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$, а также $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – некоторые постоянные величины. При этом показатели степени $\alpha_i < 1$, $i = 1,2,...,n$. Это условие гарантирует, что предельные полезности являются убывающими функциями.

Так как $\dfrac{\partial U}{\partial x_i} = \dfrac{\alpha_i}{x_i + c_i} U$, то из соотношений (59) следует, что

$$\frac{\alpha_1}{p_1(x_1 + c_1)} = \frac{\alpha_2}{p_2(x_2 + c_2)} = ... = \frac{\alpha_n}{p_n(x_n + c_n)} = \frac{\lambda}{U},$$

отсюда

$$x_i = \frac{\alpha_i U}{p_i \lambda} - c_i.$$

На основе равенства (58) получим

$$\frac{U}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i=1}^{n}p_i c_i=D,$$

откуда

$$\frac{U}{\lambda}=\frac{D+\sum_{i=1}^{n}p_i c_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

Тогда функция спроса на i-е благо выражается соотношением

$$x_i=\frac{\alpha_i\left(D+\sum_{i=1}^{n}c_i p_i\right)}{p_i\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}-c_i,\ i=1,2,\ldots,n. \qquad (61)$$

Соотношение (61) выражает величину спроса на i-е благо через цены и бюджет потребителя. При постоянном бюджете оно представляет собой функцию спроса по ценам, а при постоянных ценах – функцию спроса по доходу.

В частном случае, когда $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$, функция полезности имеет вид

$$U=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad (62)$$

и для функции спроса на i-е благо справедлива следующая зависимость от цены на i-е благо и величины дохода:

$$x_i=\frac{\alpha_i D}{p_i\sum_{i=1}^{n}\alpha_i},\ i=1,2,\ldots,n. \qquad (63)$$

Пример37. Исходные данные для двух благ $Б_1$ и $Б_2$ содержатся в табл4.

Таблица 4

Показатели	**Благо**	
	$Б_1$	$Б_2$
c	4	0
α	0,5	0,5
Цены p	20	50
Доход D	1800	

Пусть x_1 и x_2 – количество потребляемых благ. Тогда общий вид функции полезности

$$U(x_1,x_2)=(x_1+c_1)^{\alpha_1}(x_2+c_2)^{\alpha_2}.$$

Так как компоненты векторов c и α соответственно равны:

$$c_1=4,\ c_2=0,\ \alpha_1=0{,}5,\ \alpha_2=0{,}5,$$

то

$$U(x_1,x_2)=\sqrt{(x_1+4)x_2}.$$

Цена на благо $Б_1$ равна $p_1 = 20$, цена на благо $Б_2$ равна $p_2 = 50$. Доход потребителя составляет $D = 1800$ единиц.

Построить модель потребительского спроса.

Решение. Рассмотрим кривые безразличия. Кривые безразличия определяются только для двух благ. Уравнения кривых имеют вид:

$$U(x_1, x_2) = C, \ \sqrt{(x_1 + 4)x_2} = C, \ x_2 = \frac{C^2}{x_1 + 4}.$$

Получаем множество гипербол, расположенных в первой координатной четверти на разном расстоянии от начала координат в зависимости от значения константы C. Возьмем три значения этой константы: $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ и $C_3 = 3$. Тогда будем иметь уравнения кривых безразличия

$$x_2 = \frac{1}{x_1 + 4}, \ x_2 = \frac{4}{x_1 + 4}, \ x_2 = \frac{9}{x_1 + 4}.$$

Составим математическую модель для нахождения набора благ потребителя с целью максимального удовлетворения его потребностей, согласно (55) – (56)

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 + 4)x_2} \to \max \qquad (64)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 20x_1 + 50x_2 = 1800 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}. \qquad (65)$$

Считаем, что потребитель полностью расходует свой доход, поэтому в системе стоит только граница бюджетного множества.

Найдем оптимальный набор благ. Задачу оптимизации (64) – (65) можно решить несколькими способами.

1 способ (годится только в случае двух благ). Из бюджетного ограничения $20x_1 + 50x_2 = 1800$ выразим одну переменную через другую:

$$x_2 = \frac{1800 - 20x_1}{50} = 36 - 0{,}4x_1.$$

Подставим в целевую функцию:

$$U = \sqrt{(x_1 + 4)(36 - 0{,}4x_1)} = \sqrt{144 + 34{,}4x_1 - 0{,}4x_1^2}.$$

Максимальное значение функции U достигается при том же значении x_1, что и подкоренного выражения $U^2 = 144 + 34{,}4x_1 - 0{,}4x_1^2$. Находя производную и приравнивая ее нулю, получим:

$$34{,}4 - 0{,}8x_1 = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{34{,}4}{0{,}8} = 43.$$

Далее получим $x_2 = 36 - 0{,}4 \cdot 43 = 18{,}8$. Таким образом, оптимальный набор благ составляют 43 ед. блага $Б_1$ и 18,8 ед. блага $Б_2$.

2 способ. Заданная функция полезности имеет вид (60), в которой $c_1 = 4$, $c_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Поэтому можно сразу воспользоваться соотношениями (61), выражающее величину спроса на каждое благо через цены и бюджет потребителя:

$$x_i = \frac{\frac{1}{2}(D + 4p_1)}{p_i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} - c_i = \frac{D + 4p_1}{2p_i} - c_i, \ i = 1,2.$$

Для заданных значений параметров получим следующие аналитические выражения для функций спроса

$$x_1 = \frac{D - 4p_1}{2p_1}, \ x_2 = \frac{D + 4p_1}{2p_2}. \qquad (66)$$

Соотношения (66) имеют универсальный характер. Для произвольных цен p_1, p_2 и бюджет потребителя D они позволяют определить величину спроса на каждое благо.

В частности, для цен $p_1 = 20$, $p_2 = 50$ и дохода $D = 1800$ получим

$$x_1 = \frac{1800 - 4 \cdot 20}{2 \cdot 20} = 43, \ x_2 = \frac{1800 + 4 \cdot 20}{2 \cdot 50} = 18{,}8.$$

Из соотношения (61) получим функцию спроса на каждое благо в зависимости от цен и дохода:

$$x_1 = \frac{\alpha_1(D + c_1p_1 + c_2p_2)}{p_1(\alpha_1 + \alpha_2)} - c_1, \ x_2 = \frac{\alpha_2(D + c_1p_1 + c_2p_2)}{p_2(\alpha_1 + \alpha_2)} - c_2.$$

Тогда для заданных значений параметров $c_1 = 4$, $c_2 = 0$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$ получим

$$x_1 = \frac{0{,}5D - 2p_1}{p_1}, \ x_2 = \frac{0{,}5D + 2p_1}{p_2}. \qquad (67)$$

Определим функцию спроса на каждое благо по цене. Подставляя в эти соотношения значение дохода, равное $D = 1800$, получим

$$x_1 = \frac{900 - 2p_1}{p_1}, x_2 = \frac{900 + 2p_1}{p_2} \qquad (68)$$

.

Видим, что спрос на благо $Б_1$ зависит только от цены на него p_1, а спрос на благо $Б_2$ зависит не только от цены p_2, но также и от цены p_1. Полагая во второй функции цену $p_1 = 20$, получим спрос на благо $Б_2$, зависящий только от цены на него

$$x_2 = \frac{940}{p_2}. \qquad (69)$$

Определим функцию спроса на каждое благо по доходу. Подставляя в соотношения (67) значения цен $p_1 = 20$ и $p_2 = 50$, получим

$$x_1 = \frac{D - 80}{40}, \ x_2 = \frac{D + 80}{100}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение числовой функции n переменных. Приведите ее экономическую интерпретацию. Метод параллельных сечений для построения поверхностей второго порядка. Линии уровня и поверхности уровня (при >2). Дайте их понятие.

2. Дайте определение полного приращения и частных приращений функции многих переменных. Дайте определение частной производной функции многих переменных.

3. Дайте определение функции, дифференцируемой в точке. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

4. Дайте определение дифференциала функции многих переменных.

5. Дайте определения производной по направлению и градиента функции многих переменных. Сформулируйте и докажите теорему о их связи.

6. Дайте определение частных производных высших порядков. Сформулируйте и докажите теорему о равенстве смешанных частных производных второго порядка.

7. Дайте определение дифференциала высших порядков функции многих переменных.

8. Дайте определение выпуклой и вогнутой функций многих переменных через касательную плоскость. Сформулируйте критерий выпуклости и вогнутости.

9. Сформулируйте и обоснуйте условия совпадения локального экстремума с глобальным экстремумом.

10. Задания для самостоятельной работы

Контрольная работа № 1

Найти и изобразить на плоскости ХОУ область существования функции $z = f(x;y)$.

1.1. $z = 2x^2 + 3y^2$

1.2. $z = \frac{1}{x-y}$

1.3. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

1.4. $z = \sqrt{xy}$

1.5. $z = \ln\left(x^2 + 2y\right)$

1.6. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$

1.7. $z = \ln\left(4 + 4x - y^2\right)$

1.8. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

1.9. $z = \ln\left(25 - x^2 - y^2\right)$

1.10. $z = \sqrt{1 + x - y^2}$

1.11. $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$

1.12. $z = \ln(x - y)$

1.13. $z = \arcsin\left(3 - x^2 - y^2\right)$

1.14. $z = \ln x + \ln y$

1.15. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

1.16. $z = \frac{1}{4 - x^2 - y^2}$

1.17. $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$

1.18. $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$

1.19. $z = \ln(x + y)$

1.20. $z = \ln\left(x^2 + y\right)$

1.21. $z = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$

1.22. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

1.23. $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

1.24. $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$

1.25. $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$

1.26. $z=\arcsin(x+y)$

1.27. $z=\dfrac{x^3y}{2x+y}$

1.28. $z=\sqrt{3x}-\dfrac{5}{\sqrt{y}}$

1.29. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$

1.30. $z=\dfrac{\ln\left(x^2y\right)}{\sqrt{y-x}}$

Контрольная работа № 2

Найти полные дифференциалы следующих функций:

2.1. $z=x^3+y^3-3xy$

2.2. $z=x^2y^3$

2.3. $z=\sin^2 x+\cos^2 y$

2.4. $z=\ln(x^2+y^2)$

2.5. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$

2.6. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

2.7. $z=yx^y$

2.8. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

2.9. $z=e^{xy}$, при $x=1;\ y=1;\ \Delta x=0{,}15;\ \Delta y=0{,}03$

2.10. $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$, при $x=2;\ y=1;\ \Delta x=0{,}01;\ \Delta y=0{,}03$

2.11. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2.12. $z=\ln\cos\dfrac{x}{y}$

2.13. $u=(xy)^z$ 2.14. $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$, при $x=3;\ y=4;\ \Delta x=0{,}1;\ \Delta y=0{,}2$

2.15. $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$

2.16 $z=e^{xy}$

2.17 $z = e^{xy}$

2.18 $z = \sin(x - ay)$

2.19 $z = e^{\frac{y}{x}}$

2.20 $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$

2.21 $z = e^{x-y}(2x-1)$

2.22 $z = \sin\left(x + \sqrt{y}\right)$

2.23 $z = xe^{y}$

2.24 $z = x^{\sqrt{y}}$

2.25 $z = xy$

2.26 $z = arctg\left(\frac{y}{x} + 1\right)$

2.27 $z = \ln\sqrt{x + y^2}$

2.28 $z = \frac{\cos y^2}{x}$

2.29 $z = xe^{xy}$

2.30 $z = x^{y} + y^{x}$

Контрольная работа № 3

Дана функция $z = f(x; y)$ и точки $P_1(x_1; y_1)$ и $P_2(x_2; y_2)$. Требуется найти приближенное значение данной функции в т. P_2, исходя из ее точного значения в т. P_1 и заменяя приращение Δz соответствующим дифференциалом dz, применяя формулу $f(x_2; y_2) \approx f(x_1; y_1) + [dz]_{(x_1; y_1)}$. Оценить в процентах относительную погрешность.

3.1 $z = x^2 + xy + y^2$, $P_1(1; 2)$, $P_2(1{,}02; 1{,}96)$

3.2 $z = 3x^2 - xy + x + y$, $P_1(1; 3)$, $P_2(1{,}06; 2{,}92)$

3.3 $z = x^2 + 3xy - 6y$, $P_1(4; 1)$, $P_2(3{,}06; 1{,}03)$

3.4 $z = x^2 - y^2 - 6x + 3y$, $P_1(2; 3)$, $P_2(2{,}02; 2{,}97)$

3.5 $z = x^2 + 2xy + 3y^2$, $P_1(2; 1)$, $P_2(1{,}96; 1{,}04)$

3.6 $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$, $P_1(2; 4)$, $P_2(1{,}98; 3{,}91)$

3.7 $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$, $P_1(-1; 3)$, $P_2(-0{,}98; 2{,}97)$

3.8 $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$, $P_1(3; 2)$, $P_2(3{,}05; 1{,}98)$

3.9 $z = 2xy + 3y^2 - 5x$, $P_1(3; 4)$, $P_2(3{,}04; 3{,}95)$

3.10 $z = xy + 2y^2 - 2x$, $P_1(1;2)$, $P_2(0{,}97;2{,}03)$

Вычислить приближенное значение функции с точностью до 0,001 в заданной точке Р.

3.11 $z = arctg\dfrac{x}{y}$, $P(1{,}03;0{,}95)$

3.12 $z = \ln\sqrt{5x^2 - y^2}$, $P(1{,}02;1{,}85)$

3.13 $z = \sqrt[4]{4x^2 - y^2 + 4y}$, $P(1{,}96;4{,}16)$

3.14 $z = \sqrt[3]{2x^3 - y^2 + 1}$, $P(6{,}14;3{,}16)$

3.15 $z = x^2y^3 + x^2 - 5y^2$, $P(2{,}02;0{,}97)$

3.16 $z = x^{2y}$, $P(0{,}98;2{,}04)$

3.17 $z = \ln\sqrt{2x - 5y^2}$, $P(3{,}02;0{,}97)$

3.18 $z = \sqrt[3]{3x^2 - 4y}$, $P(2{,}03;0{,}97)$

3.19 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(2{,}96;4{,}05)$

3.20 $z = \ln\left(x - \sqrt{y}\right)$, $P(2{,}04;0{,}98)$ Вычислить приближенно число А с точностью до 0,001.

3.21 $A = (1{,}02)^{2{,}03} + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 0{,}02\right)$

3.22 $A = \sqrt{(4{,}03)^3 + (1{,}96)^5 + 4}$

3.23 $A = \ln\left((3{,}02)^2 - 6\sqrt[3]{0{,}96} - 2\right)$

3.24 $A = (1{,}03)^{2{,}04}$

3.25 $A = (1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$

3.26 $A = \sqrt[5]{(2{,}95)^3 + (2{,}03)^2 + 1}$

3.27 $A = (1{,}05)^{2{,}01} + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 0{,}02\right)$

3.28 $A = \dfrac{10}{(4{,}02)^2 + (1{,}97)^2}$

3.29 $A = arctg\dfrac{1{,}98}{2{,}06}$

3.30 $A = \sqrt{(1{,}97)^3 + (1{,}03)^2}$

Контрольная работа № 4

Найти производные сложных функций:

4.1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{x}{y}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$;

4.2. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$;

4.3. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=xyz$, где $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\operatorname{tg} t$;

4.4. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=u^v$, где $u=\sin x$, $v=\cos x$;

4.5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $y=t^2$;

4.6. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, где $x=u\sin v$, $y=u\cos v$;

4.7. Найти $\dfrac{du}{dt}$, где $u=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$;

4.8. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=z^2+y^2+zy$, $z=\sin t$, $y=e^t$;

4.9. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\arcsin(x-y)$, $x=3t$, $y=4t^3$;

4.10. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2y-y^2x$, где $x=u\cos v$, $y=u\sin v$;

4.11. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2\ln y$, где $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$;

4.12. Найти $\dfrac{du}{dx}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, если $u=\ln(e^x+e^y)$, где $y=x^3$;

4.13. Найти $\dfrac{du}{dx}$, если $u=\arcsin\dfrac{x}{z}$, где $z=\sqrt{x^2+1}$;

4.14. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$, где $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\sqrt{t}$;

4.15. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\ln(e^x+e^y)$, где $y=\dfrac{1}{3}x^3+x$;

4.16. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$, где $y=e^{(x+1)^2}$;

4.17. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\ln v$, где $u=\dfrac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$;

4.18. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$;

4.19. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$;

4.20. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = 2^t - 1$;

4.21. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{yz}{x}$, где $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$;

4.22. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = xyz$, где $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$;

4.23. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = y^x$, где $y = x^2$;

4.24. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{3x+2y}$, где $x = \cos t$, $y = t^2$;

4.25. Найти $\frac{du}{dx}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$, если $u = \ln(e^{2x} + e^{2y})$, где $y = x^4$;

4.26. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{xy}$, $y = t^3$

4.27. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = 2^{xy}$, где $x = t + 1$, $y = t$;

4.28. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \sin\frac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 3$, $y = t^3 + 1$;

4.29. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = arcctg(yx)$, где $x = 3^{2t}$, $y = t^2$;

4.30. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = v^u$, где $u = tgx$, $v = \ln x$.

Контрольная работа № 5

Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к следующим поверхностям в точке М:

5.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $M(a,b,c)$;

5.2. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$, $M(1,2,1)$;

5.3. $z = x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$, $M(1,1,0)$;

5.4. $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$, $M(1,1)$;

5.5. $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$, $M(1,-1,1)$;

5.6. $2x^2 + y^2 - z = 0$, $M(1,-1,3)$;

5.7. $x^2 + y^2 + z^2 = 676$, $M(1,0,1)$;

5.8. $z = 2x^2 = y^2$, $M(1,-1,3)$;

5.9. $2z = x^2 - y^2$, $M(1,1,1)$;

5.10. $4z = x^2 + y^2$, $M(1,1,1)$;

5.11. $x^2 - xy - 8x + z = 0$, $M(3,1,4)$;

5.12. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $M(1,-1,1)$;

5.13. $x^2 + y^3 + 3axy = 0$, $M(1,2)$;

5.14. $\cos xy = x + 2y$, $M(1,0)$;

5.15. $a^2(x^4 + y^4) - x^3y^3 = 9a^6$, $M(a,2a)$;

5.16. $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$, $M(1,1)$;

5.17. $x^2 + (y-b)^2 + z^2 = b^2$, $M(1,1,1)$;

5.18. $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $M(1,0,0)$;

5.19. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$, $M(1,0,1)$;

5.20. $z^2 = x^2 + y^2$, $M(0,1,1)$;

5.21. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$, $M(1,0,1)$;

5.22. $z = x^2 - y^2$, $M(1,1,0)$;

5.23. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$, $M(1,2,1)$;

5.24. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$, $M(4,3,4)$;

5.25. $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$, $M(1,0,-1)$.

5.26. $x^3y + xy^2 - z = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

5.27. $6x^2y^2 - xyz + 3y^2z - 2 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5.28. $2xy - 3y^2z - xz + 2x + y - 4 = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$

5.29. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$

5.30. $3xyz - z^3 - a^3 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = a$

Контрольная работа № 6

Исследовать на экстремум следующие функции:

6.1. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

6.2. $z = 2xy - 3x^2 - 2z^2 + 10$;

6.3. $z = 2x^2 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

6.4. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$;

6.5. $z = 2xy - 2x - 4y$;

6.6. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

6.7. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;

6.8. $z = x^{2/3} + y^{2/3}$;

6.9. $z = x^3 + y^3 - 3x + 4\sqrt{y^5}$;

6.10. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

6.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

6.12. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$;

6.13. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

6.14. $z = (x - y)^2 + (y - 1)^3$;

6.15. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

6.16 . $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 3$

6.17. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2$

6.18. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 17$

6.19. $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y + 3$

6.20. $z = x^2 + xy + y^2 + 4x - y + 5$

6.21. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 1$

6.22. $z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 12y + 10$

6.23. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 + x + 3$

6.24. $z = x^2 + xy - y^2 - 5x + 5y - 2$

6.25. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y + 5$

6.26. $z = 5 + 4x + 10y - 4xy - 2x^2 - 3y^2$

6.27. $z = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 10y + 12$

6.28. $z = 1 - x + y - 5xy - 3x^2 - 3y^2$

6.29. $z = xy - 2x^2 - y^2 + 7x - 7y - 10$

6.30. $z = x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x + 3y + 1$

Контрольная работа № 7

Найти наибольшее и наименьшее значение следующих функций в указанной области:

7.1 $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$

7.2 $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x + y = 1$

7.3 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$

7.4 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x + y = 3$

7.5 $z = xy - 2x - y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$

7.6 $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ в области, ограниченной параболой $y = \frac{1}{3}x^2$ и прямой $y = 3$

7.7 $z = 2x + y - xy$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$

7.8 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

7.9 $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x + y = -3$

7.10 $z = x^2 + 8y^2 - 6xy + 1$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

7.11 $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 1$ в квадрате $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

7.12 $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$

7.13 $z = x^2 + xy - 3x - y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$

7.14 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $y = x + 2$

7.15 $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$

7.16 $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$;

7.17 $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$;

7.18 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 3$;

7.19 $z = x + y$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$;

7.20 $z = x^2 - y^2 + 2a^2$ в круге $x^2 + y^2 \le a^2$;

7.21 $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$;

7.22 $z = 3xy$ в круге $x^2 + y^2 \le 2$;

7.23 $z = xy(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$; $y = 0$; $x + y = 6$;

7.24 $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$;

7.25 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 2$;

7.26 $z = 1 + x + 2y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0 \ge 0$, $y_0 \ge 0$, $x + y \le 1$

7.27 $z=1+x+2y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0\ge 0$, $y_0\le 0$, $x-y\le 1$

7.28 $z=x^2-y^2$ в круге $x^2+y^2\le 1$

7.29 $z=x^2y(2-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0=0$, $y_0=0$, $x+y=6$

7.30 $z=4x^2y-x^3y-x^2y^2$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x_0=0$, $y_0=0$, $x+y=6$

Контрольная работа № 8

Проверить, что функция $z=f(x;y)$ удовлетворяет данному дифференциальному уравнению.

8.1 $z=e^{xy}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.2 $z=\frac{y}{x}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.3 $z=e^{xy}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$

8.4 $z=\frac{\sin(x-y)}{x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.5 $z=arctg\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.6 $z=e^{xy}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.7 $z=\sin^2(y-ax)$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.8 $z=\ln(x^2+y^2+2y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.9 $z=y\sqrt{\frac{y}{x}}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.10 $z=e^{-\cos(ax+y)}$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.11 $z=x\ln\frac{y}{x}$, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

8.12 $z=\ln(x^2-y^2)$, $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.13 $z=x^2\ln(x+y)$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.14 $z=e^{xy}$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.15 $z=\ln\left(x-e^{-y}\right)$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.16 $z=\dfrac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.17 $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.18 $z=x^y$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.19 $z=xe^{\frac{y}{x}}$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.20 $z=\sin(x+ay)$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

8.21 $z=\cos y+(y-x)\sin y$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.22 $z=-\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.23 $z=e^{\frac{x}{y}}$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.24 $z=\arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.25 $z=\dfrac{y^2}{\sqrt{xy}}$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.26 $z=2x^2-y^4$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.27 $z=2\cos^2\left(y-\dfrac{x}{2}\right)$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.28 $z=\ln\dfrac{x}{y}$, $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.29 $z=e^{\frac{x}{y}}$, $\qquad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

8.30 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4z$

Контрольная работа № 9

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле, предварительно сделав чертеж области интегрирования.

9.1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f(x,y)dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

9.2. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

9.3. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^{2} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$

9.4. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

9.5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_x^{0} f(x,y)dy$

9.6. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int\limits_1^{2} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$

9.7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_0^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$

9.8. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

9.9. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx+\int\limits_1^{e} dy\int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$

9.10. $\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$

9.11. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$

9.12. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx$

9.13. $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x,y)dy$

9.14. $\int_0^{1/\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x,y)dx$

9.15. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$

9.16. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x,y)dy$

9.17. $\int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f(x,y)dx$

9.18. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x,y)dy$

9.19. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)dx$

9.20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{-(2+x)} f(x,y)dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f(x,y)dx$

9.21. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)dx$

9.22. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^{3/2} dx \int_0^{3-2x} f(x,y)dy$

9.23. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x,y)dx$

9.24. $\int_{-\sqrt{3}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$

9.25. $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy$

9.26. $\int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f(x,y)dx$

9.27. $\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$

9.28. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

9.29. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x,y)dy$

9.30. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$

Контрольная работа № 10

Сделать чертеж и найти площадь области D.

10.1. $D:\{y = \frac{3}{x}, \quad y = 4e^x, \ y = 3, \quad y = 4.$

10.2. $D:\{x^2 + y^2 = 12, \quad x\sqrt{6} = \mathrm{y}^2, \ (x \ge 0).$

10.3. $D:\begin{cases} \rho = 1, \\ \rho = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta. \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \text{вне окружности} \\ \rho = 1 \end{pmatrix}$

10.4. $D:\begin{cases} y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \\ y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}x. \end{cases}$

10.5. $D:\{x = 8 - y^2, \quad x = -2y.$

10.6. $D:\{x = 4y - y^2, \quad x + y = 6.$

10.7. $D:\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \\ x^2 + y^2 \ge a^2. \end{cases}$

10.8. $D:\begin{cases} y^2 = 4x - x^2, \\ y^2 = 2x. \end{cases}$ (вне параболы)

10.9. $D:\begin{cases} y = \frac{\sqrt{x}}{2}, \quad y = \frac{1}{2x}, \quad x = 16. \end{cases}$

10.10. $D:\{x = y^2 - 2y, \quad x + y = 0.$

10.11. $D:\{(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (лемниската)

10.12. $D:\{y^2 = 2 - x, \quad y^2 = 4x + 4.$

10.13. $D:\{y = \sin x, y = \cos x, \ x = 0, \ (x \ge 0)$

10.14. $D:\{x = \sqrt{36 - y^2}, \ x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$

10.15. $D:\begin{cases} \rho = 2(1 - \cos\theta), \\ \rho = 2. \end{cases}$ (вне кардиоиды)

10.16. $D:\begin{cases} y^2 + 2y - 3x + 1 = 0, \\ 3x - 3y - 7 = 0. \end{cases}$

10.17. $D:\{\rho = a\cos\varphi, \quad \rho = b\cos\varphi, \quad b > a > 0.$

10.18. $D:\{ax = y^2, \ ay = x^2.$

10.19. $D:\{y = 2x - x^2, \quad x + y = 0.$

10.20. $D:\{\rho = 2(1 + \cos\theta), \quad \rho = 2\cos\theta.$

10.21. $D:\begin{cases} x^2+y^2=2y, \ y=x, \\ x^2+y^2=4x, \ y=0. \end{cases}$

10.22. $D:\begin{cases} y^2=4(1-x), \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$ (вне параболы)

10.23. $D:\left\{ r=\dfrac{1}{\varphi}, \ \ r=\dfrac{1}{\sin\varphi}, \ \ 0<\varphi\le\dfrac{\pi}{2}. \right.$

10.24. $D:\begin{cases} y=x^3, \\ 4x-y=0. \end{cases}$

10.25. $D:\{y^2=10x+25, \ \ y^2=-6x+9.$

10.26. $D:\{x=y^2, \ \ y=x^2.$

10.27. $D:\{x=y^2-y, \ \ x-y=0.$

10.28. $D:\begin{cases} y^2-2y+x^2=0, \ \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \\ y^2-4y+x^2=0, \ \ y=\sqrt{3}x. \end{cases}$

10.29. $D:\{y=\dfrac{\sqrt{x}}{4}, \ \ y=\dfrac{1}{x}, x=16.$

10.30. $D:\{r=a\sin 3\varphi.$

Контрольная работа № 11

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

11.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$

11.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \dfrac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

11.3. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

11.4. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

11.5. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \dfrac{\mathrm{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}}dy$

11.6. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$

11.7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$

11.8. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$

11.9. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dx$

11.10. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

11.11. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

11.12. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ctg}\sqrt{x^2+y^2}}$

11.13. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dy$

11.14. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

11.15. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{tg}(x^2+y^2)dy$

11.16. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)dy$

11.17. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy$

11.18. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$

11.19. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dy$

11.20. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$

11.21. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

11.22. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

11.23. $\int\limits_{-2}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)\,dy$

11.24. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,e^{x^2+y^2}\,dy$

11.25. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dy$

11.26. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$

11.27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy$

11.28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

11.29. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$

11.30. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$

Контрольная работа № 12

Вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями.

12.1. $x^2+y^2-2y,\quad z=\frac{5}{4}-x^2,\quad z=0$

12.2. $y=2\sqrt{x},\quad y=\sqrt{x},\quad x+z=6,\quad z=0$

12.3. $z=x^2+y^2,\quad x+y=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

12.4. $z=1-x^2-y^2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3},\ z=0$ (расположено в первой октанте)

12.5. $x^2+y^2=6x,\quad x^2+y^2=9x,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad y=0,\quad z=0,\quad (y\le 0)$

12.6. $z=x^2+y^2,\quad z=2x^2+2y^2,\quad y=x,\quad y=x^2$

12.7. $x^2+y^2=4x,\quad z=10-y^2,\quad z=0$

12.8. $x+y=4,\quad y=\sqrt{2x},\quad z=3y,\quad z=0$

12.9. $z=x^2+y^2,\quad y=2x,\quad y+x=6,\quad y=1,\ z=0$

12.10. $z=x^2+y^2,\quad y=x^2,\quad y=1,\quad z=0$

12.11. $x+y+z=12,\ z=0,\quad y=0,\quad 3x+y=6,\quad 3x+2y=12$

12.12. $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q},\ x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,\ z=0$

12.13. $z=x^2+y^2,\quad z=0,\ y=1,\quad y=2x,\quad y=6-x$

12.14. $x+y+z=6,\ x^2+y^2=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

12.15. $x=2y^2,\quad x+2y+z=4,\quad y=0,\quad z=0$

12.16. $2z=y^2,\quad 2x+3y-12=0,\quad y=0,\quad z=0,\ x=0$

12.17. $z=4-x^2,\quad 2x+y=4,\quad y=0,\quad z=0,\ x=0$

12.18. $z=9-y^2,\quad 3x+4y=12,\ (y\geq 0),\ y=0,\quad z=0,\ x=0$

12.19. $z=y^2+x^2,\quad x+y=1,\quad y=0,\quad z=0,\ x=0$

12.20. $z=y+x+1,\quad y^2=x,\quad y=0,\quad z=0,\ x=1$

12.21. $z=0,\ 4z=xy,\quad x^2+y^2=4x,\quad y\geq 0,\quad x\geq 0$

12.22. $y=1+x^2,\ z=3x,\quad y=5,\quad x=0$ (расположено в первой октанте)

12.23. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad y=0,\quad z=\dfrac{x}{2},\ z=x$

12.24. $z=x+y,\ xy=1,\quad xy=2,\ y=x,\ y=2x,\quad z=0\ (x>0,\quad y>0)$

12.25. $z=5x,\quad x^2+y^2=9,\quad z=0$

Решение типовых задач

ЗАДАЧА 1

Найти и изобразить на плоскости OXY область существования функции $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

Решение.

Значения функции $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin\dfrac{y}{x} \le \dfrac{\pi}{2}$ по определению функции. Аргумент арксинуса принадлежит отрезку $[-1;1]$. $-1 \le \dfrac{y}{x} \le 1$; $-x \le y \le x$ или $|y| \le |x|$. Построим эту область (рис. 48).

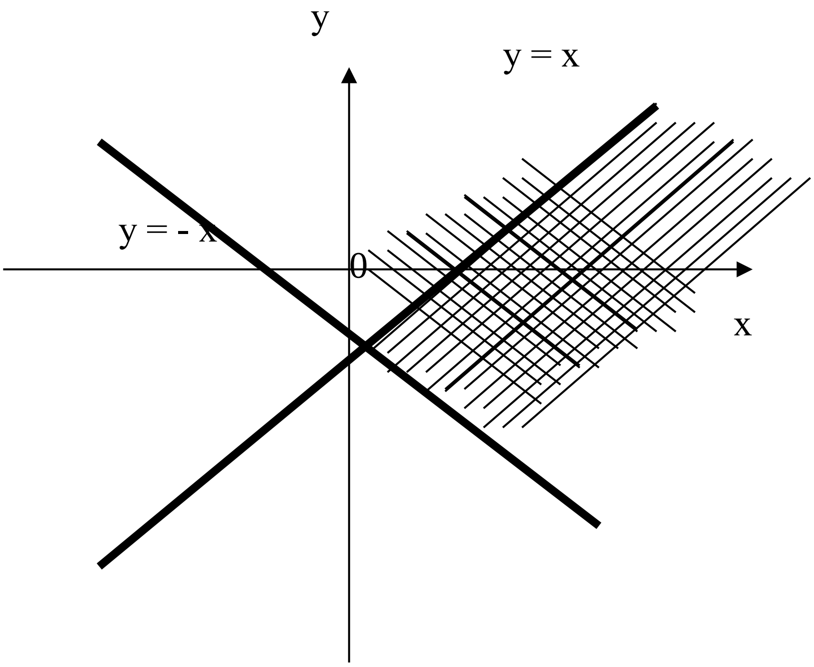


Рис. 52. Область существования функции $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

ЗАДАЧА 2

Вычислить приближенно число A с точностью до 0,001: $A = \ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$.

Решение.

По виду данного выражения составим функцию $z = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$. Данное число A есть приращенное значение этой функции в точке $P_0(1;1)$ при $\Delta x = 0{,}03$ и $\Delta y = -0{,}02$. Вычислим число A по формуле:

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta y$$

Вычислим значение полного дифференциала в точке $P_0(1;1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1;1)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1;1)}=\frac{1}{4}$$

$$(df)_{(1;1)}=\frac{1}{3}\cdot 0{,}03+\frac{1}{4}\cdot(-0{,}02)=0{,}005$$

$$A=\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)\approx\ln(1+1-1)+0{,}005=0{,}005$$

$A\approx 0{,}005$.

ЗАДАЧА 3

Дана функция $z=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$. Показать, что эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Решение.

$$z=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}\cdot 2(x-a)=-\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-2(x-a)^2}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}\cdot 2(y-b)=-\frac{y-b}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2-2(y-b)^2}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}=-\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}$$

$$\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}-\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^2}=0$$

ЗАДАЧА 4

Дано уравнение поверхности в неявном виде $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z-1=0$. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к данной поверхности в точке M, если абсцисса и ордината этой точки заданы $x_0=1$, $y_0=2$.

Решение.

Найдем аппликату точки М z_0, подставляя в уравнение поверхности $x_0=1$, $y_0=2$. Получим уравнение $z^2-8z+12=0$, $z_0'=6$, $z_0''=2$. Получили две точки $M_1(1;2;6)$ и $M_2(1;2;2)$. Уравнения касательной плоскости и нормали:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M(z-z_0)=0; \qquad \frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-4; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2y+6; \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=2z-8$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_1}=-2; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_1}=10; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_1}=4$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_2}=-2; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_2}=10; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_2}=-4$$

Запишем уравнения касательной плоскости и нормали в точках M_1 и M_2:

в точке M_1

$$-2(x-1)+10(y-2)+4(z-6)=0$$
$$x-5y-2z+21=0$$
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-6}{2}$$

в точке M_2

$$-2(x-1)+10(y-2)-4(z-2)=0$$
$$x-5y+2z+5=0$$
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-2}{-2}$$

ЗАДАЧА 5

Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z=e^{x-y}\left(x^2-2y^2\right)$.

Решение.

1. Область определения: $x\in R$, $y\in R$.
2. Найдем стационарные точки.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-y}\left(x^2-2y^2+2x\right); \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-e^{x-y}\left(x^2-2y^2+4y\right).$$

$$\begin{cases} e^{x-y}\left(x^2-2y^2+2x\right)=0 \\ -e^{x-y}\left(x^2-2y^2+4y\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2y^2+2x=0 \\ x^2-2y^2+4y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=2y$$

$$4y^2-2y^2+4y=0; \qquad y^2+2y=0; \qquad y(y+2)=0$$

$$y_1=0; \quad x_1=0; \quad y_2=-2; \quad x_2=-4$$

$P_1(0;0)$, $P_2(-4;-2)$ - стационарные точки

3. Проверим эти точки на экстремум с помощью достаточных условий. Для этого найдем частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x-y}\left(x^2-2y^2+4x\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{x-y}\left(-x^2+2y^2-2x-4y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^{x-y}\left(x^2-2y^2+8y-4\right).$$

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=0; \qquad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=4; \qquad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1}=0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

В точке P_1 $\Delta=0$ достаточный признак ответа не дает. Дополнительным исследованием можно установить, что в начале координат данная функция экстремума не имеет. В начале координат z=0, в любой окрестности точки $(0;0)$ имеются точки, в которых значения z могут быть как положительными, так и отрицательными. Например, вдоль оси ОХ (т.е. y=0) $z=e^x x^2>0$, а вдоль оси ОУ (т.е. x=0) $z=-2y^2e^{-y}<0$.

Проверим на экстремум точку $P_2(-4;-2)$.

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_2}=-8e^{-2}; \qquad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_2}=-12e^{-2}; \qquad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_2}=8e^{-2}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -8e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{vmatrix}=32e^{-4}>0, \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_2}=-8e^{-2}<0.$$

В точке $P_2(-4;-2)$ функция имеет максимум: $z_{\max}=z(-4;-2)=8e^{-2}$.

ЗАДАЧА 6

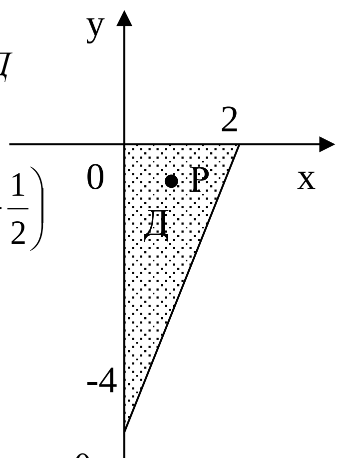
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-2x+y-10$ в треугольнике, ограниченном линиями $y=2x-4$, $x=0$, $y=0$.

Решение.

Наибольшего и наименьшего значений в замкнутой области функция достигает или во внутренних точках этой области, которые являются стационарными точками функции, или на границе области.

1. Найдем стационарные точки функции, решая систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=2x-2=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad P\left(1;-\frac{1}{2}\right)\in Д$$



Вычислим значение функции в точке $P\left(1;-\frac{1}{2}\right)$

$$z\left(1;-\frac{1}{2}\right)=-11\frac{1}{4}$$

Исследуем функцию на границах области:

$x=0$, $y=0$, $y=2x-4$.

2. На оси ОХ y=0. Данная функция при y=0 имеет вид $z=x^2-2x-10$, $x\in[0;2]$. Так как функция на этом отрезке непрерывна, то она достигает на нем

как наибольшего, так и наименьшего значения в точках стационарности функции или на концах отрезка $[0; 2]$. Найдем стационарную точку: $\frac{dz}{dx} = 2x - 2 = 0$; $2x - 2 = 0$; $x = 1$; $P_2(1; 0)$ - стационарная точка. Вычислим значения функции в стационарной точке и на концах отрезка $[0; 2]$.

$z(1; 0) = -11$; $z(0; 0) = -10$; $z(2; 0) = -10$

3. На оси ОУ x=0. При x=0 функция имеет вид $z = y^2 + y - 10$, $y \in [-4; 0]$. $\frac{dz}{dy} = 2y + 1 = 0$; $2y + 1 = 0$; $y = -\frac{1}{2}$; $P_3\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ - стационарная точка.

$z\left(0; -\frac{1}{2}\right) = -10\frac{1}{4}$; $z(0; -4) = 2$

4. Исследуем функцию на отрезке прямой $y = 2x - 4$. Подставляя значение У в заданную функцию, получим $z = 5x^2 - 16x + 2$, $x \in [0; 2] \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 10x - 16$; $x = 1{,}6$. Найдем соответствующее значение $y = -0{,}8 \Rightarrow$

$z(1{,}6; -0{,}8) = 5 \cdot (1{,}6)^2 - 16 \cdot 1{,}6 + 2 = -10{,}8$.

Сравниваем значения функции, найденные в пунктах 1., 2., 3., 4. Наименьшего значения функция достигает в точке $(1; 0)$: $z_{\min} = z(1; 0) = -11$, наибольшего значения – в точке $(0; -4)$: $z_{\min} = z(0; -4) = 2$.

ЗАДАЧА 7

Найти градиенты скалярного поля $u = x^2 + y^2 - 2z^2$ в точках пересечения оси ОХ с поверхностью $u = 4$.

<u>Решение.</u>

Найдем точки пересечения данной поверхности с осью ОХ.

$$\begin{cases} 4 = x^2 + y^2 - 2z^2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow M_1(2; 0; 0), \ M_2(-2; 0; 0).$$

Найдем градиенты в этих точках:

$$\overrightarrow{grad\, u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M \vec{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M \vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -4z$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(2;0;0)} = 4; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(2;0;0)} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(2;0;0)} = 0; \quad \overrightarrow{grad\, u} = 4\vec{i}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(-2;0;0)} = -4; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(-2;0;0)} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{(-2;0;0)} = 0; \quad \overrightarrow{grad\, u} = -4\vec{i}.$$

ЗАДАЧА 8

Найти скорость изменения скалярного поля $u = xyz$ в точке $M(5;1;-8)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(9;4;4)$.

Решение.

Абсолютная величина производной по направлению $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ определяет скорость изменения скалярного поля в точке М, а ее знак – характер изменения (возрастания или убывания).

Найдем производную скалярного поля $u = xyz$ в т. М по направлению вектора $\overrightarrow{MB}$ по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{MB}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = xz; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = -8; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -40; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 5; \qquad \overrightarrow{MB}(4;3;12)$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{4}{13}; \qquad \cos\beta = \frac{3}{13}; \qquad \cos\gamma = \frac{12}{13}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = -8\cdot\frac{4}{13} - 40\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{12}{13} = -\frac{92}{13}$$

Скалярное поле в точке М убывает со скоростью, равной $\frac{92}{13}$.

Список рекомендуемой литературы

1. Абдуллин Р. З. Математика : учеб. пособие для бакалавров, обучающихся по направлению «Менеджмент» / Р. З. Абдуллин, Л. Н. Ежова, Н. А. Никифорова. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2012. – 145 с.

2. Балдин К.В. Математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / К.В. Балдин. – М.: Юнити-Дана, 2012. – 543 с. – Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/book/114423/

3. Дыхта В. А. Математика в экономике. Программа, метод. рекомендации и контрол. задания для студентов заоч. формы обучения / сост. В.А. Дыхта, Л.С. Калашникова. – Иркутск : Изд-во ИГЭА, 2000. – 43 с.

4. Ильин В. А. Математический анализ. рек. УМО по клас. унив. Образованию : учеб. для бакалавров. [В 2 ч.]. Ч. 2. 3-е изд. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М. : Юрайт, 2013. – 357 с.

5. Малугин В. А. Математический анализ для экономического бакалавриата. допущено УМО по классическому унив. образованию. учебник и практикум / В.А. Малугин. – М. : Юрайт, 2013. – 556 с.

6. Степаненко Е.В. Математика. Вводный курс : учебное пособие / Е.В. Степаненко, И.Т. Степаненко, Т.В. Губанова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 104 с. : ил. – Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277985 (02.06.2016).

7. Шипачев В. С. Математический анализ : учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 2001. – 176 с.

Учебное издание

Белых Татьяна Ивановна,
Бурдуковская Анна Валерьевна

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

ЧАСТЬ VIII

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 21.06.17.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
http://bgu.ru.