Т.И. Белых, А.В. Бурдуковская

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

ЧАСТЬ IX

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации

Байкальский государственный университет

Т.И. Белых, А.В. Бурдуковская

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

ЧАСТЬ IX

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Иркутск
Издательство БГУ
2018

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7
Л59

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Боровский
канд. техн. наук, доц. Т.И. Ведерникова

Белых Т.И.

Л59 Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Т.И. Белых, А.В. Бурдуковская. — Иркутск : Изд-во БГУ, 2018. — 110 с. — Режим доступа: lib-catalog@bgu.ru.

В учебном пособии излагаются основные вопросы, включаемые в программу курса линейной алгебры, в доступной форме приводятся необходимые теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), а также подробно разбираются типовые задачи и примеры.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения всех специальностей, может быть использовано как развернутый справочник для успешного усвоения данного раздела курса математики, систематизации и углублению знаний по линейной алгебре, привитию навыков решения различных классов задач.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7

Оглавление

Введение 5
Матрицы 8
1.1. Типы матриц 8
1.2. Линейные операции над матрицами 10
1.3. Умножение матриц 12
Определители 14
1.4. Основные понятия 14
1.5. Основные свойства определителей 17
Применение определителей 20
1.6. Ранг матрицы 20
Обратная матрица 22
Собственные числа и собственные векторы матрицы 23
Системы линейных алгебраических уравнений 24
1.7. Основные понятия 25
1.8. Матричная запись и матричное решение систем линейных алгебраических уравнений 26
1.9. Формулы Крамера 29
1.10. Метод Гаусса (метод последовательных исключений) 31
1.11. Сравнение методов решения систем линейных алгебраических уравнений 33
Линейные однородные системы 38
Элементы векторной алгебры 39
1.12. Геометрическое определение вектора. Основные операции над векторами 39
1.13. Определение вектора в координатной форме. Векторное пространство R^n 42
1.14. Арифметические операции выполняемые над векторами 43

1.15. Понятие линейной зависимости векторов 45
1.16. Понятие базиса. Аффинные координаты 46
Аналитическая геометрия 54
1.17. Основные понятия 54
1.18. Уравнение поверхности и линии в пространствеR^3 56
1.19. Различные виды уравнения прямой на плоскости R^2 56
1.20. Расстояние от точки до прямой.
Различные виды уравнения плоскости 60
1.21. Различные виды уравнения плоскости в R^3 61
1.22. Прямая в пространствеR^3 68
1.23. Взаимное расположение прямой и плоскости в R^3. Полярная система координат 71
1.24. Кривые второго порядка 75
1.25. Поверхности второго порядка 78
1.26. Построение поверхностей по их уравнениям методом сечений 80
1.27. Преобразование прямоугольной системы координат в R^3.
Квадратичные формы 84
Приложения линейной алгебры в экономике 89
1.28. Статическая модель межотраслевой экономики 89
1.29. Примеры решения некоторых экономических задач 93
Контрольная работа 97
Список иллюстраций 106
Список использованной литературы 108

Введение

Первые элементы линейной алгебры следовали из практических вычислительных задач вокруг решения линейных уравнений. В «Началах» Евклида фигурируют две теории «линейного» характера: теория величины и теория целых чисел. Близкие к современным матричным методам подходы к решению систем линейных уравнений обнаруживаются у вавилонян (системы из двух уравнений с двумя переменными) и древних китайцев (в «Математике в девяти книгах», до трёх уравнений с тремя переменными). Однако после достижения определённости с основными вопросами нахождения решений систем линейных уравнений развитие раздела практически не происходило, и даже в конце XVIII — начале XIX века считалось, что проблем относительно уравнений первой степени больше не существует, притом системы линейных уравнений с числом переменных, отличающихся от количества уравнений или с линейно-зависимыми коэффициентами в левой части попросту считались некорректными.

Методы, сформировавшие линейную алгебру как самостоятельную отрасль математики, уходят корнями в другие разделы. Ферма в 1630-е годы, создав классификацию плоских кривых, ввёл в математику (ключевой для линейной алгебры) принцип размерности и разделил задачи аналитической геометрии по числу неизвестных (с одним неизвестным — отыскание точки, с двумя — кривой или геометрического места на плоскости, с тремя — поверхности). Эйлер создал классификацию кривых по порядкам обратив внимание на линейный характер преобразований координат, ввёл в оборот понятие аффинного преобразования (и само слово «аффинность»).

Первое введение понятия определителя для целей решения систем линейных уравнений относят к Лейбницу (1678 или 1693 год), но эти работы не были опубликованы. Также определитель обнаруживается в трудах Сэки Такакадзу 1683 года, в которых он обобщил метод решения систем линейных уравнений из древнекитайской «Математики в девяти книгах» до уравнений с n неизвестными. Маклорен, фактически используя простейшие определители в трактате вышедшем 1748 году, приводит решения систем из двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трёх уравнений с тремя неизвестными. Крамер и Безу в работах по проблеме отыскания плоской кривой, проходящей через заданную точку, вновь построили это понятие (правило Крамера сформулировано в 1750 году), Вандермонд и Лагранж дали индуктивное определение для случаев $n > 3$, а целостное определение и окончательные свойства определителей дали Коши (1815) и Якоби (1840-е годы). Гауссу (около 1800 года) принадлежит формализация метода последовательного исключения переменных для решения этих задач, ставшего известным под его именем (хотя по существу для решения систем линейных уравнений именно этот метод и использовался с древности).

Д'Аламбер, Лагранж и Эйлер, работая над теорией дифференциальных уравнений, в том или ином виде выделили класс линейных однородных уравнений и установили факт, что общее решение такого уравнения порядка n является линейной комбинацией n частных решений (однако, при этом не отмечали необходимость линейной независимости решений). Основываясь на наблюдении, что множество значений целочисленной функции f (x, y) не меняется от того, что над x и y совершается линейная подстановка (с целыми коэффициентами и определителем, равным 1), Лагранж в 1769 году разрабатывает теорию представления целых чисел квадратичными формами, а в 1770 году обобщает теорию до алгебраических форм. Гаусс развил теорию Лагранжа, рассматривая вопросы эквивалентности форм, и ввёл серию понятий, относящихся к линейным подстановкам, самым важным из которых было понятие сопряжённой (транспонированной) подстановки. С этого времени арифметические и алгебраические исследования квадратичных и связанных с ними билинейных форм составляют существенную часть предмета линейной алгебры.

Ещё одним источником подходов для линейной алгебры стала проективная геометрия, создание которой начато Дезаргом в XVII веке и получившей значительное развитие в трудах Монжа конца XVIII века и в дальнейшем в работах Понселе, Брианшона и Шаля начала — середины XIX века. В те времена основным предметом изучения проективной геометрии были коники и квадрики, являющиеся по сути квадратичными формами. Кроме того, понятие двойственности проективных пространств, введённое Монжем, являет один из аспектов двойственности в линейных пространствах (однако эта связь была замечена только в конце XIX века Пинкерле).

Но основной базой линейной алгебры стало фактически влившееся в раздел векторное исчисление, очерченное Гауссом в работах по геометрической интерпретации комплексных чисел (1831) и обретшее окончательную форму в трудах Мёбиуса, Грассмана и Гамильтона 1840-х — 1850-х годах. Так, Гамильтон в 1843 году обобщает комплексные числа до кватернионов и даёт им геометрическую интерпретацию по аналогии с гауссовой (Гамильтону, в том числе, принадлежит и введение термина «вектор»), а в 1844 году Грассман строит понятие внешней алгебры, описывающей подпространства линейного пространства. Всеобщее признание векторного исчисления в конце XIX века существенно связано с применением векторов ведущими физиками-теоретиками того времени, прежде всего, Максвеллом, Гиббсом, Хевисайдом, в частности, физиками тщательно проработана векторная алгебра в трёхмерном евклидовом пространстве: введены понятия скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, набла-оператор, сформирована вошедшая в традицию символика, также начиная с этого времени векторы проникают и в школьные программы.

Понятие матрицы ввёл Сильвестр в 1850 году. Кэли обстоятельно разрабатывает матричное исчисление, публикуя в 1858 году «Мемуар о теории матриц» (англ. Memoir on the theory of matrices), принципиально, что Кэли рассматривает матрицы как нотацию для линейных подстановок. В частности, в этой работе Кэли вводит сложение и умножение матриц, обращение матриц, рассматривает характеристические многочлены матриц, формулирует и доказывает для случаев 2×2 и 3×3 утверждение об обращении в нуль характеристического многочлена квадратной матрицы (известное как теорема Гамильтона — Кэли, так как случай 4×4 доказал Гамильтон с использованием кватернионов), доказательство для общего случая принадлежит Фробениусу (1898). Системы линейных уравнений в матрично-векторном виде впервые появились, по-видимому, в работах Лагерра (1867).

Теория инвариантов в классическом варианте — учение о свойствах алгебраических форм, сохраняющихся при линейных преобразованиях, сформирована начиная с 1840-х годов в работах Кэли, Эрмита и Сильвестра (известных как «инвариантная троица», фр. la trinité invariantive), считается, что именно теория инвариантов и приводит к созданию принципов решения произвольных систем линейных уравнений. В частности, Эрмит сформулировал и решил в частном случае проблему нахождения системы линейных диофантовых уравнений, решение в общем случае найдено Смитом (англ. Henry John Stephen Smith), результат которого остался незамеченным, пока не был обнаружен в 1878 году Фробениусом. Финальный вид результаты о системах линейных уравнений с произвольными числовыми коэффициентами получили в работах, организованных Кронекером, в которых принимали участие Вейерштрасс, Фробениус и группа немецких учёных, особое внимание уделялось строгости и точности формулировок. В частности, определитель в курсе лекций Кронекера — Вейрштаса вводился как полилинейная знакопеременная функция от n векторов n - мерного пространства, нормированная таким образом, что принимает значение 1 для единичной матрицы; притом это определение эквивалентно вытекающему из исчисления Грассмана. Фробениус в 1877 году ввёл понятие ранга матрицы, основываясь на котором в ближайшие годы сразу несколько учёных доказали утверждение об эквивалентности разрешимости системы линейных уравнений совпадением рангов её основной и расширенной матрицы, известной в русских и польских источниках как теорема Кронекера — Капелли, во французских — теорема Руше (фр. Eugène Rouché) — Фонтене (фр. Georges Fontené), в немецких и испанских — теорема Руше — Фробениуса, в итальянских и английских — теорема Руше — Капелли.

В 1888 году Пеано на базе исчисления Грассмана впервые в явном виде сформулировал аксиомы линейного пространства (векторных пространств над полем действительных чисел в том числе бесконечномерных) и применил обозначения, сохранившиеся в употреблении в XX–XXI века. Тёплиц в начале 1910-х годов обнаружил, что при помощи аксиоматизации линейного пространства для доказательства основных теорем линейной алгебры не требуется прибегать к понятию определителя, что позволяет распространить их результаты на случай бесконечного числа измерений, иными словами, линейная алгебра применима при любом основном поле. Аксиоматическое определение векторного и евклидова пространства было впервые чётко сформулировано в начале XX века практически одновременно Вейлем и фон Нейманом, исходя из запросов квантовой механики.

Тензорное исчисление, разработанное в 1890-е годы Риччи и Леви-Чивитой, составило своей алгебраической частью основное содержание полилинейной алгебры. Особое внимание к этому подразделу было привлечено в 1910-е –

1930-е годы благодаря широкому использованию тензоров Эйнштейном и Гильбертом в математическом описании общей теории относительности.

В 1922 году Банах, изучая полные нормированные линейные пространства, ставшие известными после его работ как банаховы, обнаружил, что уже в конечном случае возникают линейные пространства, не изоморфные своему сопряжению, и в этой связи в первой половине XX века методы и результаты линейной алгебры обогатили функциональный анализ, сформировав его основной предмет в современном понимании — изучение топологических линейных пространств. Также в 1920-е — 1950-е годы получает распространение направление по линеаризации общей алгебры, так, развивая результат Дедекинда о линейной независимости любых автоморфизмов поля, Артин линеаризовывает теорию Галуа, а в 1950-е годы, прежде всего, в работах Джекобсона, эти результаты обобщены на произвольные расширения тел; благодаря этим построениям обретена возможность применения инструментов и достижений хорошо изученной линейной алгебры в весьма абстрактных разделах общей алгебры.

Со второй половины XX века с появлением компьютеров, развитием методов вычислительной математики и компьютерной алгебры в рамках линейной алгебры получило бурное развитие вычислительное направление — отыскание методов и алгоритмов, обеспечивающих эффективное решение задач линейной алгебры с использованием вычислительной техники, сформировался самостоятельный раздел вычислительной линейной алгебры (англ. numerical linear algebra), а решение задач линейной алгебры стало одной из важных практических составляющих использования компьютеров. В числе работ, положивших начало разработке этого направления, стало создание Тьюрингом алгоритма LU-разложения квадратной матрицы на верхнюю и нижнюю треугольные (1948). Показательно, что результаты тестов Linpack, в которых вычислительные системы должны решить сложные системы линейных уравнений с использованием LU-разложения, считаются основным показателем производительности вычислений с плавающей запятой, в том числе и для кластерных систем. В 1950-е — 1960-е годы крупные исследования в области вычислительной линейной алгебры опубликованы Фаддеевым и Уикинсоном, значительные результаты в 1970-е — 2000-е годы получены Марчуком, Самарским, Годуновым, Голубом (англ. Gene H. Golub), Аксельсоном.

Матрицы

1.1. Типы матриц

Аналитическое описание геометрических фигур и тел, равно как и операций с ними, может быть в большом числе случаев упрощено за счет использования специального математического объекта, называемого матрицей.

Определение 1. Матрицей размера $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел или символов, содержащая m строк и n столбцов. Числа, входящие в описание матрицы, называемые ее элементами (или компонентами), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов, на пересечении которых они расположены. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце, как a_{ij}, а сами матрицы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита, например, A.

Определение 2. Числа m, n и $m \times n$ называются размерами матрицы.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, матрица А с элементами a_{ij}: $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ записывается в виде А = (a_{ij}) или в развернутой форме:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ или } A = \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} \ldots & a_{2n} \ldots \end{Vmatrix},$$

из которых будем использовать первую запись.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение 3. Матрица размера $1 \times n$ называется n-мерным столбцом или матрицей столбцом. Матрица размера $m \times 1$ называется m-мерной строкой или матрицей строкой.

Например, $(a_{11} a_{12}\, a_{13})$ – матрица строка; $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ – матрица столбец.

Определение 4. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n, в случае $m \neq n$ – прямоугольной.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов имеют специальные названия и обозначения.

Определение 5. Квадратная матрица, для которой $a_{ij} = a_{ji}, \ \forall\, i,j = \overline{1,n}$, называется симметрической.

Определение 6. Элементы матрицы, индексы которых совпадают, называются диагональными, а упорядоченная совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ называется главной диагональю квадратной матрицы n-го порядка.

Определение 7. Квадратная матрица называется диагональной, если ее элементы удовлетворяют условию

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0, & i = j \\ a_{ij} = 0, & i \neq j \end{cases}, \ \forall\, i,j = \overline{1,n}.$$

Определение 9. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Нулевую матрицу обозначают как $O_{m\times n}$.

Например,

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица второго порядка.

Определение 10. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной. Единичную матрицу принято обозначать Е.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица n – го порядка,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 3 порядка.

1.2. Линейные операции над матрицами

Равенство матриц.

Определение 11. Две матрицы A и B называются равными (A = B), если они имеют одинаковое число m строк и n столбцов и их соответствующие элементы совпадают $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Например,

1) Установить равенство матриц:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$; $(1\ 2\ 3) \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Известно, что A = B, найти x и y

$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$, используя определение равенства матриц, получим что x=1 и y=3.

Сумма матриц.

Определение 12. Суммой 2-х матриц A = (a_{ij}) и B = (b_{ij}) одинакового размера ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) называется матрица C = (c_{ij}) того же размера, что и исходные, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов складываемых матриц A и B, т.е. C=A+B и $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Например,

1) В общем виде сумма квадратных матриц второго порядка находится следующим образом:

если A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то C = $\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$;

2) Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4-3 & 3+2 \\ 0-4 & -2+3 \\ -3+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$$

3) Найти сумму матриц А= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, В= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

А+В = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Свойства операции сложения матриц:

а) А + В = В + А – коммутативность;

б) (А+ В) +С = А + (В + С) – ассоциативность.

Умножение матрицы на действительное число. Произведением матрицы А = (a_{ij}) ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$) на действительное число λ называется матрица С = $(c_{ij}) = \lambda\,(a_{ij})$ ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$), каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы А на число λ, т.е. С = λ А.

Например,

1) В общем виде произведение квадратной матрицы второго порядка на число λ находится следующим образом:

А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда матрица λА = $\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$;

2) Найти $4A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $4A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -16 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$;

3) Найти $-2A+3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

Умножим матрицу А на (–2), получим $-2A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

затем найдем произведение $3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 3 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, просуммируем полученные матрицы:

$$-2A+3B = \begin{pmatrix} -2+15 & -4+(-6) & -6+3 \\ 0+6 & -2+12 & 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -10 & -3 \\ 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Замечание: разность двух матриц одинакового размера можно определить через операцию сложения матриц и через умножение матрицы на число. Вычитание матриц вводится следующим образом: А – В это А + (–1)В, то есть к матрице *A* прибавляется матрица *B*, умноженная на (-1).

Например, найти матрицу А–В, если А= $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, В= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Матрица $A-B=\begin{pmatrix} 4-(-3) & 3-2 \\ 0-(-4) & -2-3 \\ -3-2 & 1-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.

Свойства операции произведения матрицы на действительное число

1) $\lambda\mu$ A = $\lambda(\mu$A);

2) λ(A + B) = λA + λB;

3) $(\lambda + \mu)$ A = λ A + λ B;

4) 0·A = $O_{m\times n}$.

1.3. Умножение матриц

В опрерации умножения матриц есть характерная особенность: произведение матриц A и B имеет сиысл, если число столбцов 1-ой матрицы равно числу строк 2-ой. При этом получается матрица, имеющая столько строк, сколько их имеет 1-ая матрица и столько столбцов, сколько имеет 2-ая матрица:

$$A(m\times n)\cdot B(n\times k)=C(m\times k)\,.$$

Произведением матрицы А = (a_{ij}), $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ на матрицу В = (b_{ij}), $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,k}$ называется матрица С = (c_{ij}), $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,k}$, имеющая размер $m\times k$, элементы которой определяются формулой

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj},$$

где $i=\overline{1,m}$; j = 1,2,$\cdots$ k.

Например,

1) Произведение двух квадратных матриц второго порядка А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и В = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ в общем случае равно матрице С, имеющей вид:

$$C = A\cdot B =\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix};$$

2) Найти произведение матриц А и·В.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 4+3\cdot(-5) & 2\cdot 0+3\cdot 1 & 2\cdot 3+3\cdot(-2) & 2\cdot(-2)+3\cdot 4 \\ 2\cdot 4+4\cdot(-5) & -2\cdot 0+4\cdot 1 & -2\cdot 3+4\cdot(-2) & -2\cdot(-2)+4\cdot 4 \\ 0\cdot 4+(-2)\cdot(-5) & 0\cdot 0+(-2)\cdot 1 & 0\cdot 3+(-2)\cdot(-2) & 0\cdot(-2)+(-2)\cdot 4 \end{pmatrix}==\begin{pmatrix} -7 & 3 & 0 & 8 \\ -28 & 4 & -14 & 20 \\ 10 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix};$$

3) Найти те из произведений матриц, которые имеют смысл.

$$\underset{(4\times3)}{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix},\ \underset{(3\times2)}{B}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ \underset{(1\times3)}{C}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение матриц $A\cdot B$ (это произведение существует, так как число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В), матрица С·В (это произведение существует, так как число столбцов матрицы С равно числу строк матрицы В),

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 10 & -5\\ -20 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix},\ CB=\begin{pmatrix}4 & 10\end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Если $A\cdot B$ существует, то произведение $B\cdot A$ может и не существовать, т.к. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Замечание 2. Для произведения квадратной матрицы на единичную матрицу того же порядка справедливо $A\cdot E=E\cdot A$, где Е – единичная матрица.

Замечание 3. Произведение двух ненулевых матриц может быть равно нулевой матрице, например

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot(-2) & 1\cdot(-2)\\ 1\cdot2+1\cdot(-2) & 1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Свойства операции произведения матриц.

а) AB ≠ BA;

б) A·(BC) = (AB)·C;

в) (A + B)C = AC + BC;

г) A(B + C) = AB + AC.

Возведение в степень.

Определение. 13. Целой положительной степенью A^m квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т. е.

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m\ раз}$$

Пример 1. Найти A^2, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Транспонирование матриц. Транспонированием матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования.

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы А, обозначается A^T.

При транспонировании

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования матриц.

а) $(A^T)^T = A$;

б) $(A+ B)^T = A^T+B^T$;

в) $(AB)^T = B^T A^T$;

г) $(\lambda \cdot A)^T = \lambda A^T$.

Определители

1.4. Основные понятия

Для квадратных матриц существует специальная числовая характеристика, называемая главной характеристикой квадратной матрицы, которая называется ее определителем или детерминантом.

*Определение 13***.** Определителем (детерминантом) 2-го порядка матрицы А размерности 2×2 называется число, обозначаемое символом

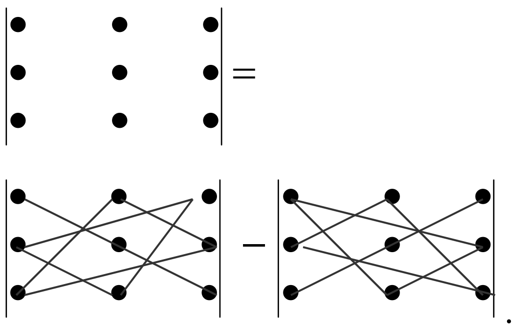
Δ_2 = detA= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и вычисляемое по правилу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $a_{11}\, a_{22}$ - $a_{21}\, a_{12}$, произведение элементов образующих главную диагональ минус произведение элементов образующих побочную диагональ.

Пример 2. $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) = -2 + 15 = 13$.

Определение 14. Определителем (детерминантом) 3-го порядка матрицы А размерности 3×3 называется число, обозначаемое символом

$\Delta_3 = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, и вычисляемое по правилу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} +$ $+a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{13}a_{22}\,a_{31} + a_{32}\,a_{23}\,a_{11} + a_{21}a_{12}\,a_{33}$, т. е. представляет собой алгебраическую сумму шести слагаемых: первые три слагаемых берутся со знаком плюс, и равны произведению элементов образующих главную диагональ, произведению элементов стоящих в вершинах треугольников одна из сторон которых параллельна главной диагонали (таких треугольников два), остальные три слагаемых берутся со знаком минус, и равны произведению элементов образующих побочную диагональ, произведению элементов стоящих в вершинах треугольников одна из сторон которых параллельна побочной диагонали (таких треугольников два). Этот способ вычисления определителей называется правилом *треугольника* или правилом *звездочки*.

Схематично, если обозначить элементы определителя точками, работу правила можно представить следующим образом:



(+) (-)

Пример 3. $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot3+2\cdot(-2)\cdot1-2\cdot2\cdot3-1\cdot(-2)\cdot1-1\cdot1\cdot2 =$$

$$= 4+3-4-12+2-2=-9.$$

Определение 15. Определителем (детерминантом) n-го порядка матрицы A размерности n×n называется число, обозначаемое символом

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

и представляющее собой алгебраическую сумму n! произведений n-го порядка элементов матрицы A, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы.

Правило добавления столбцов или строк.

Пусть дан определитель III-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1) Добавим к нему справа первые два столбца

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Проводим три диагонали параллельно главной диагонали и три диагонали параллельно побочной диагонали. Затем перемножаем элементы, стоящие на проведенных диагоналях. Произведения элементов, стоящие на диагоналях, параллельных главной диагонали, будем брать со знаком (+), а произведение элементов на диагоналях, параллельных побочной диагонали будем брать со знаком (-). Тогда

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Правило добавления двух строк снизу.

В этом случае добавляем первые две строки снизу, затем перемножаем элементы, стоящие на диагоналях параллельных главной диагонали, эти произведения берем со знаком (+). Перемножаем элементы, стоящие на диагоналях, параллельных побочной диагонали, эти произведения берем со знаком

(-), т.е.

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right| \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

.

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Пример 4. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. Применим метод добавления столбцов

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ {\scriptstyle -} & {\scriptstyle -} & {\scriptstyle -} & {\scriptstyle +\;+} & {\scriptstyle +} \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 2 -$$

$$-(-3)\cdot 3\cdot(-1) = -12 - 2 - 9 = -23$$

Применим метод добавления строк

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{array} = 2\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 1 - 3(-1)(-3) =$$

$$= -12 - 2 - 9 = -23$$

1.5. Основные свойства определителей

1. При транспонировании матрицы величина определителя не изменится. Из этого свойства следует, что строки и столбцы в определителе равноправны.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. Перестановка 2-х строк или столбцов определителя равносильна умножению его на (-1).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3. Если определитель имеет 2 одинаковые строки или 2 одинаковых столбца, то он равен нулю.

4. Умножение всех элементов некоторой строки или столбца на число $\lambda \neq 0$ равносильно умножению определителя на это число λ, т. е. общий множитель любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки или столбца определителя равны 0, то и сам определитель равен 0.

6. Если соответствующие элементы 2-х строк или столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

7. Если каждый элемент некоторой строки или некоторго столбца определителя представляет собой сумму 2-х слагаемых, то определитель может быть

представлен в виде суммы 2-х определителей, первый из которых имеет в упомянутой строке (столбце) первые слагаемые и те же элементы, что и исходный определитель, в остальных строках (столбцах), а второй определитель имеет в упомянутой строке(столбце) вторые слагаемые и те же элементы, что и исходный определитель в остальных строках (столбцах).

Например,

$$\begin{pmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

8. Если к элементам некоторой строки или столбца определителя прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на произвольный множитель $\lambda \neq 0$, то величина определителя не изменится.

Пример 5. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, применяя свойство 8.

Умножим элементы первой строки на (-1) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки, получим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 = -1.$$

Для проверки свойства 8 , вычислим исходный определитель по правилу треугольника $\Delta = 2 + 3 + 2 - 1 - 3 - 4 = -1$.

Как видно из результатов вычислений, свойство 8 выполняется.

Прежде чем сформулировать свойство 9, введем некоторые новые понятия.

Определение 16. Минором M_{ij}некоторого элемента a_{ij}данного определителя *n*-го порядка называется определитель (*n* – 1) – го порядка, получаемый из данного определителя путём вычёркивания в данном той строки и того столбца на пересечении которых расположен этот элемент.

Например, минор M_{11}элемента a_{11} определителя третьего порядка равен $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}\,a_{23}$, а минор M_{12} элемента a_{12} того же определителя равен $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$.

Определение 17. Алгебраическим дополнением A_{ij} некоторого элемента a_{ij}данного определителя n-го порядка называется минор M_{ij} умноженный на (-1) в степени номер строки плюс номер столбца на пересечении которых элемент расположен, т. е. это число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Миноры и алгебраические дополнения играют важную роль в алгебре и ее приложениях. Одним из таких применений является основополагающая теорема о способе вычисления определителей.

Теорема. Величина определителя равна сумме произведений элементов какой либо строки на их алгебраические дополнения.

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

$1 \le i \le n$

Эта формула называется разложением определителя по элементам i-ой строки, и таких выражений можно записать n. Аналогичное утверждение имеет место и для разложения определителя по любому столбцу, и таких разложений тоже n.

Данная формула позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

Определитель III-го порядка обладает теми же свойствами, что и определитель n-го порядка.

Пример 6. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив его по элементам второй строки $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{21} + 3A_{22} + 0\,A_{23} + 0\,A_{24} = 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(3+14+48-$$

126-2-8)+2(4+24+36-48-9-4)=-207.

Разложить определитель можно по любой строке (столбцу) определителя, однако объем вычислений можно существенно уменьшить, выбрав строку (столбец) с большим количеством нулей.

Пример 7. Применяя свойства определителей, вычислить определитель 4-го порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Выполним следующие действия: 1) из элементов 1-й строки вычтем утроенные соответствующие элементы 2-й строки; 2) к элементам 3-й строки прибавим соответствующие удвоенные элементы 2-й строки; 3) из элементов 4-й строки вычтем соответствующие элементы 2-й строки. Тогда исходный определитель преобразуется к виду

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Разложим этот определитель по элементам 1-го столбца, так как этот столбец содержит нули, получим $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Прибавляя к элементам 1-й строки соответствующие элементы 3-й строки и вычитая из элементов 2-й строки соответствующие элементы 3-й строки, получим $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Разложим определитель по элементам 1-го столбца, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 70.$$

9. Сумма произведений элементов какой –либо строки или столбца на алгебраические дополнения элементов другой строки или столбца равна 0.

Согласно сформулированной теореме является способом вычисления определителей порядка выше третьего.

Определение 18. Определитель, у которого элементы, стоящие ниже или выше диагонали все нули, имеет **диагональный** вид, например $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}$.

Применение определителей

1.6. Ранг матрицы

Для любой прямоугольной матрицы определим некоторое число, которое называется рангом матрицы и является ее важнейшей характеристикой.

Пусть дана произвольная матрица, состоящая из m строк и n столбцов $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Выделим в ней произвольным образом r строк и r столбцов, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную подматрицу r –го порядка. Определитель такой матрицы будем называть минором r –го порядка матрицы A. Таких миноров можно составить несколько. Максимальный порядок миноров равен минимальному из размеров матрицы, т. е. минимальному из чисел m и n. Выделим из всевозможных миноров только те, которые отличны от нуля.

Например, в матрице 4-го порядка $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ определитель 3-го порядка $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ есть один из миноров 3-го порядка, а определитель 2-го порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ есть один из миноров 2-го порядка.

Определение 19. Рангом матрицы A называется наибольший из порядков отличных от нуля ее миноров.

Обозначается ранг матрицы A следующим образом rang A или r_A, или Rang(A).

Если ранг матрицы А равен r , то это означает, что в матрице А имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка больше чем r равен нулю.

Определение 20. Отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным минором* этой матрицы. Столбцы и строки матрицы, участвующие в создании базисного минора, также называются *базисными*.

Теорема. (О базисном миноре). Всякая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).

В общем случае в матрице может быть несколько базисных миноров.

Пример 8. Найти rang матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Начинаем искать миноры не равные нулю с наибольшего порядка. $M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Делаем вывод о том, что $r_A = 3$, так как минор 3-го порядка отличен от нуля, а окаймляющий его минор 4-го порядка равен нулю.

Этот метод вычисления ранга матрицы, называемый методом окаймляющих миноров, достаточно трудоёмкий , так как приходится вычислять много определителей различных порядков.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n, т. е. $m=n$. Максимальный порядок минора квадратной матрицы равен n; в этом случае минор равен определителю этой матрицы.

Определение 21. Квадратная матрица называется вырожденной или особенной, если ее детерминант равен нулю, и невырожденной или неособенной в противном случае.

Рассмотрим другой метод вычисления ранга матрицы, называемый методом элементарных преобразований.

Для этого введем следующее определение.

Определение 22. Элементарными преобразованиями матрицы A называются следующие преобразования:

1) умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и то же число , отличное от нуля;
2) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца) , умноженных на одно и то же число;
3) перемена местами строк (столбцов) матрицы;
4) отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Определение 23. Матрицы, получаемые одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными.*

Эквивалентные матрицы не равны друг другу, но ранги их равны.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Пример 9. Вычислить ранг матрицы A.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{разделим элементы первой строки} \\ \text{на 2} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{элементы первой строки умножаем на } (-3) \text{ и складываем} \\ \text{с соответствующими элементами второй строки , затем умножаем на } (-5) \\ \text{и прибавляем к соответствующим элементам третьей строки.} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{21}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{элементы первого столбца столбец складываем} \\ \text{с сответствующими элементамипоследнего,} \\ \text{первую строку автоматически обнуляем} \\ \text{элементы второй и третьей строк} \\ \text{умножаем соответственно на } \frac{-1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -27 & 21 & 0 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{элементы 5 − го столбца отбрасываем,} \\ \text{элементы 3 − го делим на 9;} \\ \text{элементы 4 − го на 7; одинаковые} \\ \text{столбцы обнуляем.} \end{matrix} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{matrix} \text{Отбрасываем элементы} \\ \text{3 − го столбца и 3 − ей строки.} \end{matrix} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{rang}(\mathrm{A}) = 2.$$

Вывод. Ранг матрицы равен количеству единиц, стоящих вдоль главной диагонали матрицы, если все внедиагональные элементы нули.

Обратная матрица

Определение 24. Матрица, у которой строки заменены столбцами , называется *транспонированной* по отношению к исходной матрице.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \ \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 25. Матрица A^*, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A^{T} называется *присоединённой* к матрице А или *взаимной.*

Определение 26. Обратной матрицей A^{-1} к квадратной матрице А называется матрица , удовлетворяющая условию $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{E}$.

Элементами обратной матрицы являются алгебраические дополнения элементов присоединённой матрицы A^*, делённые на число, равное определителю матрицы A, т. е. det A = $|A|$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Из этой формулы следует, что обратную матрицу имеет только невырожденная матрица, иными словами еслидля некоторой матрицы порядка n ее ранг $r<n$, то для нее существует обратная матрица.

Пример 10. Найти обратную матрицу для матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим сначала определитель матрицы А, применяя правило треугольников, получим:

$|\mathrm{A}|$ = 4+0+0 – 0 -1 – 12 = 9, определитель матрицы не равен нулю, поэтому матрица А имеет обратную.

Находим алгебраические дополнения.

$A_{11} = 3$, $A_{21} = 4$, $A_{31} = 2$, $A_{12} = -6$, $A_{22} = 2$, $A_{32} = 1$, $A_{13} = 3$, $A_{23} = 1$, $A_{33} = -4$,

$$A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы проверить вычисления , найдём произведение исходной и обратной к ней матриц $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1}$:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}.$$

Собственные числа и собственные векторы матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы n –го порядка. При умножении матрицы n –го порядка на n-й вектор в произведении получается n-й вектор:

$$Ax = b\,.$$

Однако для любой матрицы существует набор особых векторов, таких, что произведение матрицы на вектор из такого набора равносильно умножению этого вектора на определенное число.

Определение 27. Число λ называется собственным значением матрицы A n –го порядка, если существует такой ненулевой вектор $x \in R^n$, что выполняется равенство

$$Ax = \lambda x\ .$$

Определение 28. Характеристическим уравнением матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется уравнение $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Это уравнение получается из уравнения $Ax = \lambda x$, представленного в матричном виде, если сгруппировать все слагаемые этого уравнения в левой части и переписать в виде:

$$(A - \lambda E)x = 0,$$

где E и 0 – соответственно единичная матрица и нулевой вектор.

Корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и преставляют *собственные или характеристические числа* матрицы A.

Определение 29. Система уравнений $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0, \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33}-\lambda)\xi_3 = 0 \end{cases}$

в которой λ имеет одно из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (и определитель которой в силу этого равен 0) определяет тройку чисел $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$, соответствующую данному характеристическому числу, эта совокупность трёх чисел определяет вектор

$\boldsymbol{\vec{r} = \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k}$, называемый *собственным вектором* матрицы A.

Пример 11. Дана матрица $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, найти её характеристические числа и собственные векторы.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7.$

1). $\lambda_1 = 1$, подставляем в систему $\begin{cases} (5-1)\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 + (3-1)\xi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \end{cases}$

эта система имеет бесчисленное множество решений, полагаем $\xi_1 = \alpha$, тогда $\xi_2 = -2\alpha$ и собственный вектор $\vec{r} = \alpha i - 2\alpha j$**.**

Аналогично.

2). $\lambda_2 = 7, \begin{cases} -2\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 - \xi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\xi_1} = \xi_2 = \beta, \boldsymbol{\vec{r}} = \beta i + \beta j.$

Системы линейных алгебраических уравнений

Основной задачей линейной алгебры является изучение систем линейных алгебрачческих уравнений. Ниже рассмотрим, что представляют собой общие линейные системы, и как матричное исчисление применяется к анализу таких систем.

1.7. Основные понятия

Определение 28. Общая система уравнений состоит из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$, так что при $m \neq n$ число уравнений не равно числу неизвестных.

Рассмотрим такую систему в развернутой форме записи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{m1}n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Числа $a_{11}, \ a_{12}, \ a_{1n}, \ldots, a_{mn}$, стоящие при неизвестных , называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ в правых частях уравнений – *свободными членами*. Коэффициенты системы и свободные члены системы считаются *заданными*. Неизвестные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются переменными системы.

Определение 29. Если все свободные члены системы равны нулю, т. е. $b_i = 0, \forall i$, то система называется однородной, иначе, неоднородной, т. е. в том случае если хотя бы один из свободных членов отличен от нуля.

Определение 30. Решением системы называется любой набор чисел $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \overline{x_n}$, подстановка которых в каждое уравнение системы вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ обращает это уравнение в тождество.

Замечание. Каждое решение состоит из *n* чисел, речь идет об одном решении, а не о *n* решениях.

Определение 31. Система (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система может иметь единственное решение, или же бесконечно много решений.

Например, «система» $5x_1 + 4x_2 = 3$, состоящая из одного уравнения, имеет бесконечно много решений, которые принято описывать равенством $x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}$. Придавая в последнем равенстве *свободной переменной* x_1 всевозможные знкачения, получим различные решения данной «системы».

С другой стороны, система двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$, является несовместной: левые части уравнений совпадают, а правые различны. Нет таких значений переменных, которые бы удовлетворили обоим уравнениям системы одновременно.

Очевидно, что любая однородная система совместна, так как она имеет по крайней мере нулевое решение, которое будем называть тривиальным. Но она может иметь и нетривиальное решение, т. е. отличное от нулевого.

Определение 33. Две совместные системы уравнений называются *равносильными или эквивалентными*, если каждое решение первой системы является решением второй и обратно.

Теорема Кронекера-Капелли. (Кронекер (1823-1891) немецкий математик. Капелли (1855-1910)-итальянский математик).

Для того, чтобы система линейных уравнений (1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ был равен рангу её расширенной матрицы В = $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$, полученной путём добавления к основной матрице А столбца из свободных членов системы.

1). Если $r(A) = r(B) = n$ – числу неизвестных, то система (1) имеет единственное решение.

2). Если же $r(A) = r(B) < n$, то система (1) имеет бесчисленное множество решений, зависящих от $(n - r)$ параметров (свободных неизвестных).

1.8. Матричная запись и матричное решение систем линейных алгебраических уравнений

С использованием матриц и операций над ними системы уравнений можно записывать в различных формах, которые являются более компактными, по с равнению с развернутой формой записи.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{m1}n = b_m \end{cases},$$

введем матрицу коэффициентов системы размерности $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

матрицу-столбец свободных членов $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ размерности $m \times 1$ матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ размерности $n \times 1$. Тогда СЛАУ может быть записана в матричной форме, следующим образом:

$$AX=B. \qquad (2)$$

При B=0 имеем однородную СЛАУ вида $AX=O_{m\times n}$, а при $B\neq 0$ – неоднородную.

Переход от одной формы записи к другой форме записи носит автоматический характер.

Для иллюстрации рассмотрим СЛАУ в развернутой форме записи. При m=3 и n =3 имеем $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_m \end{cases}$, здесь

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ тогда

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ имеем систему уравнений в матричном виде.

Коротко эту систему можно записать в *тензорном* виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\ldots, m. \qquad (3)$$

Решить систему линейных алгебраических уравнений – это значит по заданной СЛАУ уметь ответить на следующие вопросы.

1. Имеет ли данная СЛАУ решение, т. е. совместна ли она?

2. Если решение СЛАУ существует является ли оно елдинственным? Если да, как его найти?

3. Если неединственно, то как найти бесконечное множество решений СЛАУ?

Ответы на сформулированные вопросы зависят от свойств матрицы системы и матрицы свободных членов (матрицы правых частей) системы. Следует заметить, что в корне отличаются однородные и неоднородные системы, а также системы с числом неизвенстных, меньшим числа уравнений, от систем с противоположным признаком. Как правило, при $m<n$ (система оказывается *недоопределенной*, если уравнения системы не противоречивы) надо ожидать неединственности решений, а при $m>n$ (система перегружена уравнениями, т. е. *переопределенная*, если только нет лишних уравнений) – несовместности системы.

Определение 32. Совместная система линейных уравнений называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой,* если она имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Матрица коэффициентов системы является невырожденной, т. е. ее детерминант отличен от нуля.

Пусть матрица $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ является решением данной системы, тогда она удовлетворяет равенству (2).

Обе части равенства (2) умножим слева на обратную матрицу A^{-1}, получим,

$$A^{-1}\text{A X} = A^{-1}\text{ B}. \tag{4}$$

Используя определение обратной матрицы, имеем $E\ X = A^{-1}$ X, но $E\ X = X$, поэтому равенство (4) принимает вид

$$X\ = A^{-1}\ \cdot B. \tag{5}$$

Полученное равенство (5) называется матричным решение системы (1).

Теорема. (Об единственности решения системы с невырожденной матрицей). Если матрица A коэффициентов системы AX=B имеет неравный нулю детерминант, т. е. матрица A обратима, то система (2) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле $X\ = A^{-1}\ \cdot B$ при любой матрице B.

А это значит и при B=0.

Следствие. Если матрица А коэффициентов однородной системы AX=B имеет отличный от нуля детерминант, то эта СЛАУ имеет только тривиальное решение $\bar{X} = O_{n\times 1}$, т. е. решение с нулевыми элементами матрицы $\bar{X}$. Наоборот, если однородная СЛАУ AX=$O_{n\times 1}$ имеет нулевое решение, то определитель матрицы коэффициентов однородной системы равен нулю.

Значит однородная СЛАУ AX=$O_{n\times n}$, в которой число уравнений равно числу неизвестных, может иметь ненулевые решения только в том случае, когда матрица системы вырожденная.

Пример 12. Матричным методом решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_2 + 2x_3 = \ 13 \end{cases}$$

Решение. Здесь m = n =3. Матрица системы невырожденная, так как ее определитель |A| = 4+0+0 – 0 -1 – 12 = 9, не равен нулю, поэтому матрица А имеет обратную, следовательно решение будем находить в виде X = $A^{-1}\cdot B$, для этого найдём обратную матрицу для матрицы А, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} найдена в примере 8: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$;

$$\text{X} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10}{3} & \frac{4\cdot 23}{9} & -\frac{26}{9} \\ \frac{46}{3} & -\frac{46}{9} & \frac{23}{9} \\ \frac{-10}{3} & \frac{23}{9} & -\frac{52}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$.

Если СЛАУ имеет вырожденную матрицу коэффициентов системы, то такая СЛАУ может вообще не иметь решений или иметь их бесконечно много.

Теорема. (Необходимое условие единственности решения). Если система линейных алгебраических уравнений $AX=B$ имеет единственное решение при любой матрице правых частей B, то детерминант матрицы коэффициентов системы A отличен от нуля.

1.9. Формулы Крамера

Формула $X = A^{-1} \cdot B$, которая получена в предыдущем пункте для решения системы линейных алгебраических уравнений $AX=B$ с невырожденной матрицей коэффициентов системы A может быть использована в ином виде, если вместо матрицы A^{-1} в эту формулу подставить формулу ее вычисления

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{(n-1)1}}{|A|} & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & & \frac{A_{(n-1)2}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{(n-1)n}}{|A|} & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{(n-1)2} & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{(n-1)n} & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда получим

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{(n-1)2} & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{(n-1)n} & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot B =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{(n-1)2} & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{(n-1)n} & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{(n-1)2} & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{(n-1)n} & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + & \cdots & +A_{n1}b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + & \cdots & +A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Из равенства матриц в левой и правой частях последнего равенства, получим

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{(n-1)i}b_{n-1} + A_{ni}b_n), \forall\, i = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Выражение в скобках обозначим через

$$\Delta_i = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{(n-1)i}b_{n-1} + A_{n1}b_i, \forall\, i = \overline{1,n}. \quad (7)$$

Сумма (7) представляет собой разложение детерминанта матрицы A по элементам i-го столбца и называется вспомогательным определителем который получается из определителя матрицы A заменой в нем элементов i-го столбца столбцом из свободных членов.

Следовательно,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, \forall\, i = \overline{1,n}\ . \tag{8}$$

Обозначим через Δ определитель матрицы A, получим

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \forall\, i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Правило Крамера. Если определитель матрицы A системы $AX=B$ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам (9), называемым формулами Крамера.

Пример 13. Решить систему 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Решение. Умножим обе части первого уравнения на a_{21}, а 2-го на a_{11} и вычтем из 1-го уравнения 2-е уравнение.

$$a_{11}x_1a_{21}+a_{12}x_2a_{21} = b_1a_{21}$$

$$-\,a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11} \ \Rightarrow a_{12}a_{21}x_2 - a_{22}a_{11}x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11} \ \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{b_1a_{21}-b_2a_{11}}{a_{12}a_{21}-a_{22}a_{11}}\ .$$

Числитель этой дроби равен определителю – $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Знаменатель равен -$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, обозначим его через $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, а через $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$, тогда $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Аналогичными действиями можно получить $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Решение системы запишем в виде: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Для системы, состоящей из трёх уравнений с тремя неизвестными, эти формулы примут вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ , \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \mathrm{b}_2 \\ a_{31} & a_{32} & \mathrm{b}_3 \end{vmatrix}$. Δ – определитель матрицы коэффециентов, Δ_1, Δ_2,Δ_3 – вспомогательные определители.

Пример 14. Решить систему 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ \qquad 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}.$$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 79 \neq 0$.Система имеет единственное решение.

Составим вспомогательные определители и вычислим их

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = =395$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} =-158$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237$.

Применим формулы Крамера, получим $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 5$; $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$.

Ответ. $x_1 = 5$; $x_2 = -2$ $x_3 = 3$.

Из формул Крамера следует:

1) $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение.

2) $\Delta = 0$, но хотя бы один из Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, $\Delta_{x_3} \neq 0$, то система не имеет решения.

3) $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений или совсем не имеет решения.

1.10. Метод Гаусса (метод последовательных исключений)

Схема метода последовательных исключений Гаусса является полезным рабочим инструментом для нахождения решений СЛАУ в конкретных примерах и лежит в основе большинства численных методов решений с использованием вычислительной техники. Продемонстриркем его работу на конкретном примере.

Пример 15. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

Решение. Установим совместность системы , найдём ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, det A $= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ =-9+1+30+6-6 $\frac{15}{2} \neq 0$, значит ранг матрицы А равен 3. Составим расширенную матрицу

B $= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{pmatrix}$, так как в ней содержится det A$\neq 0$, то rang B также равен 3.

Делаем вывод: согласно теореме Кронекера-Капелли $r(A)$=$r(B)$=3-числу неизвестных, поэтому система совместна и имеет единственное решение.

Метод начинается с исключения одного из неизвестных из всех уравнений системы, кроме одного. Обычно исключается x_1 из первого уравнения, при условии что коэффициент при этой переменной отличен от нуля, т. е. $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то можно поменять местами уравнения системы. В данном примере $a_{11} = 1 \neq 0$. Коэффициент $a_{11} = 1$ будем называть *ведущим элементом первого шага исключения.* Выполним *следующие элементарные операции*:

- умножение первого уравнения на числа, кратные коэффициентам при x_1 в других уравнениях;
- вычитание домноженного первого уравнения из других уравнений.

Обратим внимание на то что умножение первого уравнения на числа должно быть таким что при его вычитании из других уравнений системы коэффициент при переменной x_1 должен оказаться равным нулю.

В предложенном примере на первом шаге поступим следующим образом:

- вычитаем первое уравнение, умноженное на 5, из второго уравнения;
- вычитаем первое уравнение, умноженное на 1, из третьего уравнения.

Получаем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 11x_2 + 16x_3 = 70 \\ \frac{5}{2}x_2 + x_3 = 8 \end{cases},$$

в которой ведущее первое уравнение осталось без изменений, а последние два уравнения не содержат неизвестную x_1 и образуют подсистему исходной системы с неизвестными x_2 x_3. На втором шаге *ведущим элементом* будет $a'_{22} = 11$, при условии что исключается неизвестная x_2 из второго уравнения.

Вычитаем второе уравнение, умноженное на $\frac{5}{22}$, из третьего уравнения.

Получаем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 11x_2 + 16x_3 = 70 \\ 29x_3 = 87 \end{cases}.$$

Все шаги метода исключения сводятся к элементарным преобразованиям строк матрицы коэффициентов системы, преобразование столбцов матрицы системы при этом не используется.

В представленном примере матрица коэффициентов системы и матрица свободных членов имеют вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, В $= \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица такова:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{pmatrix}.$$

Если с помощью элементов первой строки матрицы $\bar{A}$ будем получать нули в первом столбце, то получим следующую матрицу:

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & 11 & 16 & 70 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Из сравнения матриц $\overline{\mathrm{A}}$ и $\bar{A}_1$ следует, что $\bar{A}_1$ – это расширенная матрица коэффициентов преобразованной системы по результатам первого шага исключения неизвестного x_1 с помощью первого уравнения системы.

Если с помощью элементов строки матрицы $\bar{A}_1$ будем получать нули во втором столбце, то получим следующую матрицу:

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 8 \\ 0 & 11 & 16 & 70 \\ 0 & 0 & 29 & 87 \end{pmatrix}.$$

Из сравнения матриц $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ следует, что $\bar{A}_2$ – это расширенная матрица коэффициентов преобразованной системы по результатам второго шага исключения неизвестного x_2 с помощью второго уравнения системы.

Вывод. Каждый шаг метода исключения соответствует элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы коэффициентов системы, в результате чего образуется нижняя треугольная подматрица на месте тех строк и столбцов, где находились элементы матрицы *А (*слева от столбца свободных членов).

Теперь «*обратным ходом»* или *подстановкой* из 3-го уравнения выражаем x_3 и подставляем во 2-е уравнение, из 2-го выражаем x_2 и подставляем 1-е уравнение, окончательно получаем: $x_3 = 3$; x_2= 2; $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; x_3 =3.

1.11. Сравнение методов решения систем линейных алгебраических уравнений

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы связано с громоздкими вычислениями. Сравнивая, рассмотренные методы решения СЛАУ с методом Гаусса можно утверждать, что метод исключения не только упрощает систему уравнений, но и позволяет автоматически выяснить обратимость матрицы коэффициентов системы.

Тем не менее, этот метод не совсем пригоден для анализа систем и экономических моделей. Методы обратной матрицы и правило Крамера в этих ситуациях оказываются наиболее пригодными.

Вывод. Рассмотренные методы имеют свои недостатки и преимущества, и, следовательно в целом дополняют друг друга.

Пример 16. Проверить, что линейная система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

с квадратной матрицей коэффициентов совместна и решить ее:
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);
в) методом исключения Гаусса.

Решение: Установим совместность данной системы. Матрица коэффициентов системы невырожденная:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+2+3-3-0-1 = 1 \neq 0 \text{ т.е.}$$

определитель $\Delta \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение.

а) Решим систему по формулам Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3.$$

Ответ: Решением является вектор $(1;2;3)$.

б) Решим систему с помощью обратной матрицы. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \Rightarrow$$

система в матричной форме $A \cdot x = b$ имеет решение $x = A^{-1} \cdot b$, где A^{-1} – обратная матрица.

Найдем матрицу A^{-1}.

A_{ij} – алгебраические дополнения каждого элемента таковы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Теперь находим искомое решение:

$$x=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}14\\ 6\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14+18-3\\ 14-18+6\\ 0+6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix},$$ т.е. $x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=3$, что совпадает, естественно, с решением полученным выше.

в) Применим метод исключения Гаусса. Для этого составляем расширенную матрицу системы и, пользуясь элементарными строчными преобразования, получаем:

$\overline{A}=(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)$, из элементов второй строки вычтем элементы третьей строки, получим $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)$, затем поменяем местами вторую и третью строки, получим $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)$.

Преобразованная матрица $\overline{A}$ соответствует простейшей системе

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14\\ x_1+x_2=3\\ x_3=3\end{cases}.$$

Из нее очевидным образом получаем вектор решения $x=(1;2;3)$.

Пример 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=1.\\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1\end{cases}$$

Решение: Имеем $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ 3 & 3 & 8 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

Проверку условия совместности $r(A)=r(\overline{A})$ удобно проводить параллельно с решением системы методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы $\overline{A}=(A|b)$ и осуществим с ней строчные элементарные преобразования, соответствующие методу исключения:

$$\overline{A}=\left(A|b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 8 & 1 & 1\end{array}\right)\rightarrow$$

умножим 1-ую строку на (-2) и прибавим ко 2-ой, 1-ую строку умножим на (-5) и прибавим к 3-ей.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -12 & -6 & -7 & -1\\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4\end{array}\right)\rightarrow$$

разделим 3-ую строку на (-2)

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -12 & -6 & -7 & -1\\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2\end{array}\right)\rightarrow$$

прибавим к 3-уй строке 2-ую строку.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 0 & -12 & -6 & -7 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Из вида преобразованной матрицы $\overline{\mathrm{A}}$ следует, что $\mathrm{r}(\mathrm{A})=3$, так как минор 3-го порядка (стоящий на месте A)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 0 & -12 & -6\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=12\neq 0$$ и является базисным.

Поскольку $\mathrm{r}(\mathrm{A})=3$ – число уравнений системы, то данная система обязательно совместна (при любом векторе *b*). Преобразованной матрице $\overline{\mathrm{A}}$ соответствует система:

$$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1\\ \quad -12x_2-6x_3-7x_4=-1\\ \quad\quad -x_2 \qquad\qquad\qquad =1\end{cases}$$

Отсюда сразу получаем, что x_2=-1, так что система еще более упрощается:

$$\begin{cases}x_1+4x_3+3x_4=1\\ \qquad 6x_3+7x_4=-13\end{cases}.$$

Т. к. базисными являются переменные x_1, x_2, x_3 (столбцы с номерами 1, 2, 3 вошли в Δ_3), то для нахождения общего решения осталось выразить переменные x_1, x_3 через свободную переменную x_4 ($x_2=-1$ уже найдена):

$$6x_3 + 7x_4 = 13 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_3 = -\frac{13}{6} - \frac{7}{6}x_4}$$

следовательно, первое уравнение последней системы преобразуется к виду

$$x_1 - \frac{2}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = -7\frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}}.$$

Выражения для x_1, x_3 вместе со значением $x_2=-1$ описывают все множество решений данной системы через свободную переменную x_4, т.е. задают общее решение системы.

Ответ: $(-7\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3}x_4; -1; \frac{13}{6} - \frac{7}{6}x_4; x_4)$.

Пример 18. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$.

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

1) Исключим x_1 из 2, 3 и 4 уравнений. Поменяем местами 1 и 2 строки, затем 1-ую строку умножим последовательно на (-2), (-3), (-2) и прибавим ко 2-ой, 3-ей и 4-ой строкам, соответственнополучим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & -10 & 9 & -2 \\ 0 & 7 & -11 & 14 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

Поменяем местами 2-ую и 4-ую строки

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 12 & 8 \\ 0 & 7 & -11 & 14 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 9 & -2 \end{array}\right).$$

Исключим x_2 из 3-го и 4-го уравнений. Умножим 2-ую строку на (-7) и прибавим к 3-ей,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 45 & -70 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -10 \end{array}\right).$$

3-ю строку разделим на 5 и поменяем местами 3-ю и 4-ую строки

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & -14 & -10 \end{array}\right).$$

Исключим x_3 из 4-го уравнения, 3-ю строку умножим на (-9) и прибавим к 4-ой

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & -31 & 62 \end{array}\right).$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ \qquad x_2 - 8x_3 + 12x_4 = 8 \\ \qquad\qquad x_3 - 5x_4 = -8 \\ \qquad\qquad\quad 31x_4 = 62 \end{cases}.$$

Используя обратный ход метода Гаусса, найдем из 4-го уравнения $x_4 = 2$.

Из 3-го уравнения $x_3 = -8 + 5x_4 = -8 + 10 = 2$. Из 2-го уравнения $x_2 = 8 + 8x_3 - 12x_4 = 8 + 16 - 24 = 0$. Из 1-го уравнения $x_1 = -1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1 - 6 + 8 = 1$.

Ответ: (1; 0; 2; 2.).

Линейные однородные системы

Определение 34. Система m уравнений с n неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \ a_{m1}x_1 \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{10}$$

называется линейной однородной системой.

Следуя формулам Крамера, можно сделать вывод:

1) $\Delta \neq 0$, $m=n$ → система имеет единственное нулевое решение;

2) $\Delta \neq 0$, $m<n$ → система имеет бесчисленное множество решений и среди этих решений могут быть и ненулевые.

Теорема. Для того, чтобы система (10) имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы её определитель $\Delta = 0$.

Доказательство необходимости.

Пусть система (10) имеет ненулевое решение, но $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \cdots = \Delta_{x_n} = 0$. По формулам Крамера имеем:

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \cdots$ $x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$, так как есть ненулевое решение.

Предположим, что $x_2 \neq 0$, то $x_2 \cdot \Delta = \Delta_{x_2}$, а это возможно только тогда, когда $\Delta = 0$.

Доказательство достаточности.

Пусть $\Delta = 0$, тогда при вычислениях по формулам Крамера имеем $\frac{0}{0}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0}$.

Возьмём $r(A) < n$, и по теореме Кронекера – Капелли система (10) имеет бесчисленное множество решений в том числе и ненулевое.

Вывод. Однородная система уравнений всегда совместна и имеет ненулевое решение только тогда, когда определитель системы равен нулю $\Delta = 0$.

Пример 19. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 2y + 9z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0. \to \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 2y + 9z = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы последней системы равен двум, а число неизвестных равно трем, поэтому, следуя теореме Кронекера – Капелли, 3-2=1, следовательно, одна из переменных – свободная. Систему перепишем так: $\begin{cases} 3x + 2y = z \\ x + 2y = -9z \end{cases}$ и решим её по формулам Крамера. Для этого найдём $\Delta = 4$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} z & 2 \\ -9z & 2 \end{vmatrix}$ =2z+18z=20z,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & z \\ 1 & -9z \end{vmatrix} =$

$=-27z-z=-28z$.

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{20z}{4} = 5z$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-28z}{4}$.

Ответ. $x = 5z$; $y = -7z$, где z любое число.

Элементы векторной алгебры

1.12. Геометрическое определение вектора. Основные операции над векторами

Определение 35. Пространство, в котором введены декартовы координаты x, y, z, так, что выполняются условия: разным точкам пространства соответствуют разные наборы координат и каждому набору x, y, z соответствует какаято точка P, изучаемого пространства, называется 3-х мерным векторным пространством и обозначается R^3 (R^2 – двухмерное векторное пространство – плоскость; R^1 одномерное векторное пространство – прямая). Координаты – (от латинского слова) упорядоченный, определённый.

Определение 36. Геометрическим вектором или просто вектором называется направленный отрезок прямой. Обозначается $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, A – начало, B – конец вектора или $\vec{a}$ или $\vec{b}$.

Определение 37. Вектором называется матрица размерности (n× 1) или (1× n); $\vec{a}$ = (n× 1) $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{a} = (1 \times n) = (a_1 a_2 \cdots a_n)$.

Длина вектора – это его модуль, абсолютная величина, обозначается $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, $|\vec{a}|$.

Определение 38. Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают.

Определение 39. Векторы называются коллинеарными (рис. 1), если они лежат на одной либо на параллельных прямых, их можно всегда представить $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

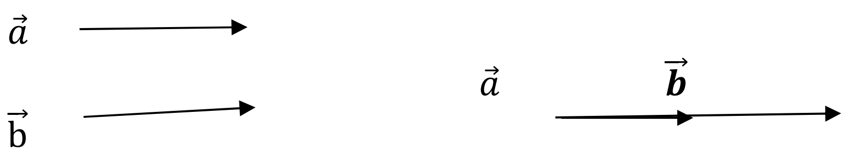


Рис. 1. Коллинеарные векторы

Определени 40. Векторы называются компланарными (рис. 2), если они лежат в одной плоскости.

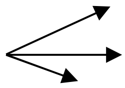
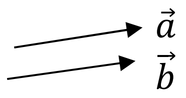
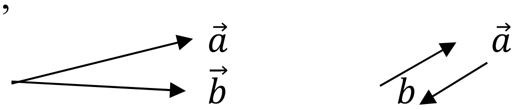


Рис. 2. Компланарные векторы

Определение 41. Два вектора называются равными (рис. 3), если они

1) коллинеарны;
2) имеют одинаковое направление;
3) имеют равные длины.





$\vec{a} = \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a} \neq \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Рис. 3. Равные и неравные векторы

Векторы, изучаемые в аналитической геометрии, называются свободными, так как точка приложения вектора выбирается произвольно. Есть ещё понятие скользящего и связного вектора, которые используются в физике и механике. Скользящие – такие, которые считаются равными, если лежат на одной прямой (например, сила). Связные – если, имеют общее начало и равны.

Основные геометрические операции над векторами.

Определение 42. Геометрической суммой 2-х векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 4), идущий из начала первого в конец второго, при условии, что $\vec{b}$ выходит из конца $\vec{a}$.

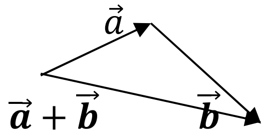


Рис. 4. Геометрическая сумма векторов

Свойства суммы векторов.

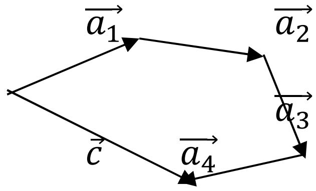
1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) существует такой противоположный вектор $\vec{a}'$, что $\vec{a}+\vec{a}'=0$.

Определение 43. Суммой нескольких векторов называется вектор, который замыкает ломанную линию, составленную из векторов слагаемых (рис. 5).



$\vec{c}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}$

Рис. 5. Геометрическая сумма нескольких векторов

Правило параллелограмма

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма этих векторов представляет собой вектор $\vec{a}+\vec{b}$, направленный по диагонали, выходящей из общего начала, а разность $\vec{a}-\vec{b}$ направлена по второй диагонали, причём вектор разности направлен в сторону уменьшаемого (рис. 6).

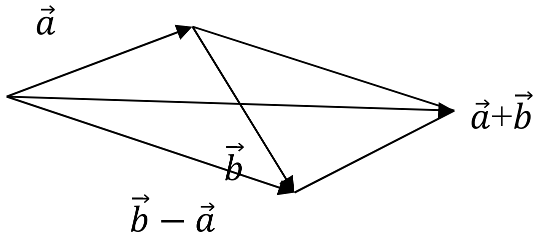


Рис. 6. Правило параллелограмма

Определение 44. Произведением вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

2) $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

3) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ направлены одинаково, если $\lambda>0$ и противоположны, если $\lambda<0$, если же $\lambda=0$, то $\vec{b}=0$.

Свойства произведения вектора на число.

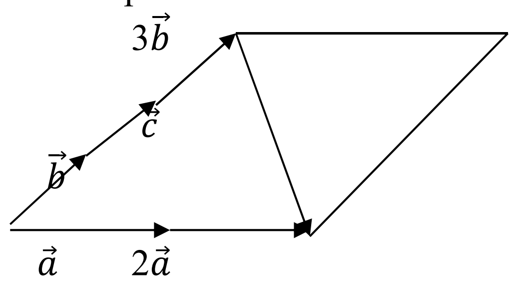
1) $\alpha\,(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

2) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

3) $\alpha(\beta\overrightarrow{a}) = \alpha\beta\vec{a}$.

Пример 20. Построить вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$**.**

Решение**.**



Проекция вектора на ось.

Определение 45. Ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ на ось ℓ называется величина отрезка A'B' оси. Обозначается: $\text{пр}_{\ell}\vec{a}$ =A'B'

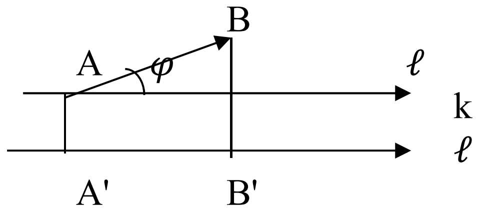


Рис. 7. Проекция вектора на ось

Теорема. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось ℓ равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью $\text{пр}_{\boldsymbol{\ell}}\boldsymbol{\vec{a}} = |\boldsymbol{\vec{a}}| \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\varphi}$**.**

Основные свойства проекции.

1) $\text{пр}_{\ell}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \text{пр}_{\ell}\vec{a} + \text{пр}_{\ell}\vec{b}$;

2) $\text{пр}_{\ell}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \text{пр}_{\ell}\vec{a} - \text{пр}_{\ell}\vec{b}$;

3) $\text{пр}_{\ell}\alpha\vec{a} = \alpha\ \text{пр}_{\ell}\vec{a}$;

Вывод. Линейные операции над векторами сводятся к точно таким же операциям над их проекциями.

1.13. Определение вектора в координатной форме. Векторное пространство $\boldsymbol{R^n}$

Определение 46. Вектором размерности *n*, или *n*- мерным вектором, называется любой упорядоченный набор из *n* чисел, которые называются координатами или компонентами вектора.

Векторы обозначаются малыми буквами латинского алфавита, например, *x*=(1; 2; 3).

Если численные значения координат вектора не конкретизированы, то их обозначают такими же буквами, наделяя нижним порядковым индексом. Например, *n*- мерные векторы x и y записываются так: $x = (x_1;\ x_2;\ x_3; \dots; x_n)$, $y = (y_1;\ y_2;\ y_3; \dots; y_n$.

Если рассматривается совокупность, например, k векторов, то для их обозначения целесообразно использовать следующие: $x^1 = (x_1^1;\ x_2^1;\ x_3^1; \dots ; x_n^1;)$, $x^2 = (x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2; \dots ; x_n^2), \dots , x^k = (x_1^k;\ x_2^k;\ x_3^k; \dots ; x_n^k)$.

Определение 47. Совокупность векторов размерности *n*, называется *n*- мерным векторным пространством и обозначается R^n.

Любой *n*- мерный вектор можно интерпретировать как точку *n*- мерного векторного пространства, которая является его концом. Следовательно, понятие вектора пространства R^n и точки пространства R^nтождественны. Вектор $0A = (x_1;\ x_2;\ x_3; \dots ; x_n)$, исходящий из точки O, и точка $A(x_1, x_2, x_3, \dots , x_n)$ тождественны.

Определение 48. Нулевым вектором размерности *n*, или *n*- мерным вектором, называется любой упорядоченный набор из *n* чисел, каждая координата которого равна нулю. Нулевой вектор, или просто точка $O \in R^n$ является началом координат пространства R^n.

Определение 49. Длиной или нормой вектора размерности *n* называется число, обозначаемое символом $\|x\|$, и определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \qquad (11)$$

При *n*=2, норма вектора представляет собой расстояние от точки – до начала координат, вычисленное по теореме Пифагора

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} x_i^2}. \qquad (12)$$

Например, длина вектора *x*=(1; 2) равна $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ед. дл.

При *n*=3, норма вектора определяется:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}. \qquad (13)$$

Например, длина вектора *x*=(-1; 3; 4) равна $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$ ед. дл.

В теории потребительского выбора, когда описывается поведение потребителя широко используется понятие вектора. Вектор благ, т. е. «меню» потребителя представляет собой точку $x = (x_1;\ x_2;\ x_3; \dots ; x_n)$ в *n*-мерном пространстве благ, а вектор $p = (p_1;\ p_2;\ p_3; \dots ; p_n)$ – перечень каждого блага.

Аналогично в теории производства выпуск производителя можно описать перечнем объемов выпуска каждого товара и перечнем количества использованных факторов производства, поэтому в этой теории также используются многомерные пространства товаров и факторов производства.

1.14. Арифметические операции выполняемые над векторами

Сравнение векторов.

Пусть даны векторы $x, y \in R^n$.

Определение 50. Два вектора называются равными, если их соответствующие координаты равны, т. е.

$$x = y <=> x_i = y_i, \forall i = \overline{1,n}. \qquad (14)$$

В частности, $x = \overline{0}, x \in R^n$, $\overline{0} \in R^n$, равносильно тому, что $x_i = 0 \ \forall \ i = \overline{1,n}$.

Все неравенства между векторами выполняются покоординатно, например,

$$x \geq y <=> x_i \geq y_i, \forall i = \overline{1,n}; \qquad (15)$$

$$x < y <=> x_i < y_i, \forall i = \overline{1,n}. \qquad (16)$$

Аналогичный смысл имеют противоположные неравенства.

Определение 51. Множество всех неотрицательных векторов пространства R^n будем называть неотрицательным ортантом пространства R^n и обозначать через R_+^n, т. е.

$$R_+^n = \{x \in R^n : x \geq 0\}. \qquad (17)$$

Сумма векторов.

Определение 52. Суммой векторов $x, y \in R^n$ называется вектор x+y $\in R^n$, каждая компонента которого равна сумме соответствующих компонент складываемых векторов, т. е. $x + y = x_i + y_i, \forall i = \overline{1,n}$.

Например, при $x = (1; -3; 2)$ и $y = (2; 0; 4) \Rightarrow x + y = (3; -3; 6)$. Ясно, что сложение векторов перестановочно, т. е. $x + y = y + x$ и $x + 0 = 0 + x = 0$, где 0 – нулевой вектор.

Разность векторов.

Определение 53. Разностью векторов $x, y \in R^n$ называется вектор $x - y \in R^n$, каждая компонента которого равна разности соответствующих компонент вычитаемых векторов, т. е. $x - y = x_i - y_i, \forall i = \overline{1,n}$.

Например, при $x = (1; -3; 2)$ и $y = (2; 0; 4) \Rightarrow x - y = (-1; -3; -4)$. Ясно, что разность векторов перестановочно, т. е. $x - y = y - x$ и $x - 0 = 0 - x =$
$= 0$, где 0 – нулевой вектор.

Умножение вектора на число.

Определение 54. Умножение вектора x на число α дает вектор $\alpha = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5, \dots, \alpha x_n)$, т. е. при умножениина число α все координаты вектора x нужно умножить на число α.

Например, если α=$\frac{1}{3}$, $x = (1; 0; -4)$, то $\alpha x = (\frac{1}{3}; 0; -\frac{4}{3})$.

Из определения 54 легко следует, что αx = x α и 0x = $\vec{0}$. При α=-1 получается вектор противоположный вектору x: $(-1) \cdot x = -x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Если α>-1 умножение вектора x на число α означет растяжение вектора x в α раз, а – при 0< α<1 – сжатие.

При α<0 это соответствуетрастяжению или сжатию противоположного вектора(-x) в |α| раз.

Эта терминология вполне согласуется с тем, что показывает аналитический расчет: $\frac{\|\alpha x\|}{x} = \frac{|\alpha|\cdot\|x\|}{\|x\|} = |\alpha|$, при $x \neq \overrightarrow{0}$.

Введенные операции обладают следуюими свойствами:

- $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- $x - y = x + (-y)$;
- $\alpha(x \pm) = \alpha x \pm \alpha y$;
- $\alpha \cdot (\beta x) = \beta(\alpha x) = \alpha\beta x$;
- $1 \cdot x = x$;
- $x + (-x) = 0$, где α, β – числа, $x, y, z \in R^n$.

Операции сложения, вычитания векторов и умножение их на числа производятся по правилам, аналогичным децствиям с числами. В развернутой форме, т. е. покоординатной записи все арифметические действия с векторами выполняются покомпонентно и требуют совпадения размерностей векторовпри сложении и вычитании. Операция деления для векторов не имеет смысла, а операция умножение вводится специальным образом – и заслуживает отдельного рассмотрения.

1.15. Понятие линейной зависимости векторов

Определение 55. Линейной комбинацией n векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \ldots . \overrightarrow{a_n}$ называют сумму произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, то есть выражение вида :

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}, \qquad (18)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n$ числа.

Определение 56. Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \ldots . \overrightarrow{a_n}$ называются линейно зависимыми, если найдутся такие числа α_n, из которых хотя бы одно не равно нулю, так что линейная комбинация (18) обращается в ноль, т. е. $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$.

Определение 57. Векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \ldots . \overrightarrow{a_n}$ называются линейно независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации (18) возможно лишь в случае, когда все $\alpha_n = 0$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

Доказательство необходимости. Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, докажем , что они коллинеарны.

По определению линейной зависимости векторов найдутся такие α и β, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$=0, пусть $\beta \neq 0$,тогда разделим на β, получим $\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} + \vec{b} = 0 \Longrightarrow \vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a}$

Последнее равенство означает, что векторы коллинеарны.

Доказательство достаточности. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, т. е. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ или $\vec{b} - \lambda\vec{a} = 0$. Это значит, что векторы линейно зависимы.

Теорема. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Теорема. Любые четыре вектора в R^3 линейно зависимы.

1.16. Понятие базиса. Аффинные координаты

Определение 58. Три линейно независимые вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют в трехмерном пространстве базис, если любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то есть

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \quad (19)$$

Это разложение вектора в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

*Определение 59***.** Числа α, β, γ называются координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то есть координаты вектора – это коэффициенты линейной зависимости, выражающие данный вектор через данный базис.

Определение 60. Базис $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, в котором векторы произвольны называется аффинным .

Теорема. Всякий вектор $\vec{d}$ может быть единственным образом разложен в данном базисе.

Доказательство. Пусть имеет место разложение

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \quad (20)$$

и разложение

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \quad (21)$$

Вычтем из равенства (20) равенство (21), получим $0 = \vec{a}(\alpha - \alpha_1) + \vec{b}(\beta - \beta_1) + \vec{c}(\gamma - \gamma_1)$, так как $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис, то эта линейная комбинация выполняется тогда, когда $\alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1 = \gamma - \gamma_1 = 0$, следовательно $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$, то есть оба разложения совпадают.

Определение 61. Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, исходящие из общего начала, например, точки *O* называются аффинным базисом, который обозначается $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

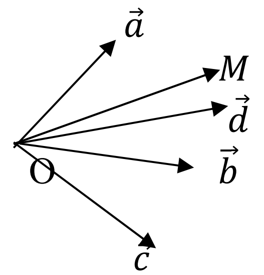


Рис. 8. Аффинный базис

Определение 62. Вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало и точку М, называется радиусом вектором точки *M*.

Декартова система координат (д. с. к.).

Определение 63. Аффинный базис $\{O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, у которого векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежат на взаимно ортогональных осях и длины равны единицы, называется декартовым ортогональным базисом, принято обозначать $\{0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

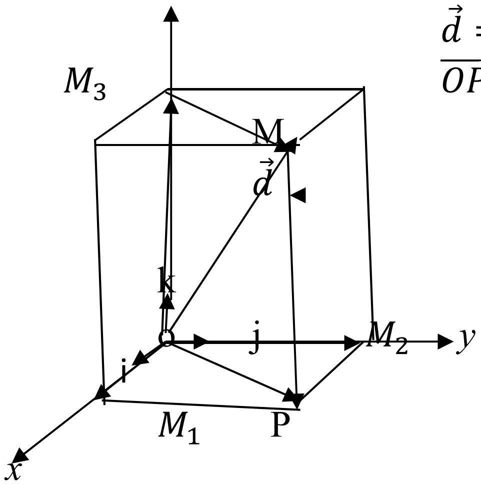
В силу теоремы о разложении вектора в базисе для д.с.к. имеет место разложение

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где *x, y, z*– координаты вектора в этом базисе, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ – орты осей координат соответственно.

Теорема. Декартовы прямоугольные координаты x, y, z вектора $\vec{d}$ равны ортогональным проекциям этого вектора на оси *OX, OY, OZ* соответственно.

Доказательство. Построим рисунок



$\vec{d} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM_3}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

$\vec{d}=\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$

$|\overrightarrow{OM_1}| =$ пр$_x$ОМ;

$|\overrightarrow{OM_2}| =$ пр$_y$ ОМ;

$|\overrightarrow{OM_3}| =$ пр$_z$ ОМ;

по построению.

$\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$; $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$; $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$, как коллинеарные векторы.

$|\overrightarrow{OM_1}| =$ пр$_x$ОМ $= |x| \cdot \cos 0^\circ \cdot |\vec{i}| = |x|$; $|\overrightarrow{OM_2}| =$ пр$_y$ ОМ$= |y| \cdot \cos 0^\circ \cdot |\vec{j}| = |y|$;

$|\overrightarrow{OM_3}| =$ пр$_z$ ОМ $= |z| \cdot \cos 0^\circ \cdot |\vec{k}| = |z|$ ч. т. д.

Определение 64. Проекции вектора $\vec{d}$ на оси координат называются декартовыми прямоугольными координатами вектора.

Теорема. Линейные операции над векторами сводятся к точно таким же линейным операциям над их одноимёнными координатами.

Пример 21. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = \{1,2,3\}$; $\vec{b} = \{0, -5,3\}$.

Решение. По теореме x_c=1+3· 0=1; y_c =2+3· (-5) = -13; z_c = 3+3·3= 12

Ответ. $\vec{c} = \{1, -13, 12\}$.

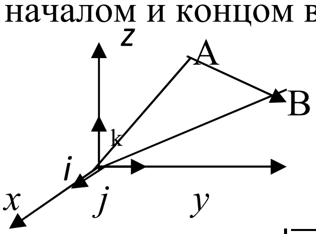
Определение 65. Радиус вектор – это вектор, соединяющий начало координат и точку А, обозначается $\overrightarrow{r_A}=\{x, y, z\}$.

Длина вектора. Направляющие косинусы.

Пусть дан вектор $\vec{a} = \{x, y, z\}$, так как он является диагональю параллелограмма, то из курса элементарной математики, известно, что $|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{OM_1}|^2=|\overrightarrow{OM_2}|^2=|\overrightarrow{OM_3}|^2$ или $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, следоватеьно

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (22)$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB} = \{x, y, z\}$; точки *A* (x_1, y_1, z_1) и *B* $(x_2, y_2, z_2$ служат началом и концом вектора, соответственно.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$; $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$,
так как x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 проекции, то
$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, а модуль вектора

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Обозначим углы наклона вектора $\vec{a}$ с осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно через α, β, γ.

Определение 66. Косинусы углов, образованных вектором $\vec{a}$ и осями координат, называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Если вектор имеет координаты $\vec{a}=\{x, y, z\}$, то $x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$; $y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$; $z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$, как проекции вектора на соответствующие оси координат, следовательно $\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{Y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}$ или

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,;\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} \qquad (23)$$

Возведём в квадрат обе части равенств (23) и сложим, получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} = 1.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\ . \qquad (24)$$

Условие (24) означает, что α, β, γ – углы вектора с осями координат.

Условия коллинеарности двух векторов.

Пусть вектор $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ коллинеарен вектору $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, тогда он представим в виде $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, и, следовательно его координаты равны $x_1 = \lambda\, x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda\, z_2$, из этих равенств находим λ, то есть $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$; $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$; $\frac{z_1}{z_2} = \lambda$, после чего приравниваем левые части этих равенств и получаем условие коллинеарности векторов, как пропорциональность их соответствующих координат

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (25)$$

Определение 67. Единичный вектор , направленный по вектору $\vec{a}$, называется его **ортом** и обозначается $\vec{a}^0$ и находится по формуле

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \qquad (26)$$

Пример 22. Найти орт вектора $\vec{a} = \{3, 4, 5\}$.

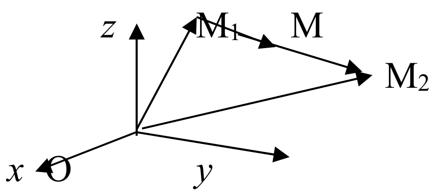
Решение. Найдём модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$ ед. дл., тогда орт вектора запишется $\vec{a}^0 = \{\frac{3}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}\}$.

Деление отрезка в данном отношении.

Определение 68. Разделить отрезок $[M_1M_2]$ в данном отношении $\lambda > 0$, это значит найти на данном отрезке такую точку *M*, такую что имеет место равенство $\frac{|[M_1M]|}{|[M\,M_2]|} = \lambda$ или $|M_1M| = \lambda|M\,M_2|$.

Пусть даны точки $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, найдём координаты точки

M (x, y, z), делящей отрезок $[M_1M_2]$ в отношении λ.



$\overrightarrow{\mathrm{M_1M}} = \{ x - x_1 , y - y_1 , z - z_1\}$;
$\overrightarrow{\mathrm{MM_2}} = \{ x_2 - x , y_2 - y , z_2 - z\}$.

$\overrightarrow{\mathrm{M_1M}} = \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{MM_2}}$ в координатной форме:

$$x - x_1 = \lambda\,(x_2 - x) \Longrightarrow x\,(1+\lambda) = \lambda\, x_2 + x_1 \;\Longrightarrow x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

$$y - y_1 = \lambda\,(y_2 - y) \Longrightarrow y\,(1+\lambda) = \lambda\, y_2 + y_1 \Longrightarrow y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};$$

$$z - z_1 = \lambda\,(z_2 - z) \Longrightarrow z\,(1+\lambda) = \lambda\, z_2 + z_1 \Longrightarrow z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M середина отрезка, то $|M_1 M| = |M M_2|$ и $\lambda = 1$, тогда

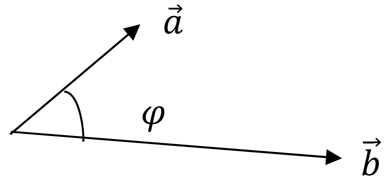
$$x_{\text{ср.}} = \frac{x_1+x_2}{2},\ y_{\text{ср.}} = \frac{y_1+y_2}{2},\ z_{ср.} = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Если $\lambda < 0$, то точка М лежит вне отрезка $[M_1M_2]$.

Скалярное произведение векторов. Векторное произведение.

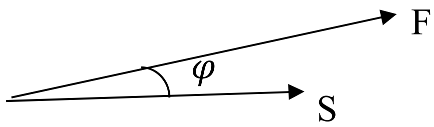
Определение 69. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$.



Физический смысл скалярного произведения.

Из физики известно, что работа силы по перемещению S, находится по формуле A = F S $\cos\varphi$.



Если $\vec{F}$ вектор силы, а $\vec{S}$ вектор перемещения, то работа А = $\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cdot\cos\varphi = (\vec{F},\vec{S})$, то есть работа равна скалярному произведению векторов силы и пути

$$A = (\vec{F}\cdot\vec{S}).$$

Свойства скалярного произведения.

1. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ следует из определения;
2. $\lambda\,(\vec{a},\overrightarrow{b}) = \left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right) = (\overrightarrow{a},\lambda\vec{b})$;
3. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\vec{c}) + (\vec{b}\vec{c})$;
4. Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\boxed{(\vec{a},\vec{b}) = 0}$, так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$;
5. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 00 \Longrightarrow (\vec{a})^2 = |\vec{a}|2$ или $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;
6. $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha = |\vec{a}|\cdot$ пр$_{\vec{a}}\vec{b}$, следовательно

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|};\ \ \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|}. \qquad (27)$$

7. $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$, следовательно

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \qquad (28)$$

Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов

Пусть заданы вектор $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и вектор $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ своими разложениями в д. с. к., найдём их скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b}) = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + x_1z_2\left(\vec{i},\vec{k}\right) + y_1x_2(\vec{j},\vec{i}) + y_1y_2(\vec{j},\vec{j}) + y_1z_2\left(\vec{j},\vec{k}\right) + z_1x_2\left(\vec{i},\vec{k}\right) + z_1y_2\left(\vec{k},\vec{j}\right) + z_1\,z_2(\vec{k},\vec{k}) =$ {($(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k})$ =1, другие скалярные произведения базисных векторов равны нулю, так как они взаимно перпендикулярны} = $x_1x_2\ +\ y_1y_2\ +\ z_1\,z_2$.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2\ +\ y_1y_2\ +\ z_1\,z_2. \qquad (29)$$

Запишем основные формулы в декартовых координатах:

$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{X_1X_2\ +\ Y_1Y_2\ +\ Z_1\ Z_2}{\sqrt{(X_1)^2+(Y_1)^2+(Z_1)^2}}$; $\cos\alpha = \frac{X_1X_2\ +\ Y_1Y_2\ +\ Z_1\ Z_2}{\sqrt{(X_1)^2+(Y_1)^2+(Z_1)^2}\sqrt{(X_2)^2+(Y_2)^2+(Z_2)^2}}$;

$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_1x_2\ +\ y_1y_2\ +\ z_1\,z_2 = 0$ – условие перпендикулярности 2-х векторов.

Пример 23. Найти работу силы $\overrightarrow{F} = \{1,2,3\}$ по перемещению в направлении вектора $\overrightarrow{\text{AB}} = \{0,1,2\}$.

Решение. А = ($\vec{F},\overrightarrow{AB}) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8$ (дж).

Векторное произведение векторов. Правые и левые тройки векторов.

Определение 70. Тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется правой (левой), если после приведения к одному началу, вектор $\vec{c}$ располагается по ту сторону плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, откуда поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ свершается против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Рис. 9. Правая и левая тройка векторов

Определение 71. Аффинная система координат называется правой (левой), если три базисных вектора образуют правую (левую) тройку.

Определение 72. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет трем условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha$;

2) Вектор $\vec{c}\perp\overrightarrow{a}$ и вектору $\vec{b}$;

3) Вектор $\vec{c}$ направлен так, что образует правую тройку с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначается $\vec{c} = [\overrightarrow{\vec{a}, \mathrm{b}}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Свойства векторного произведения векторов.

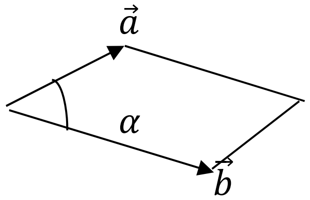
1. $[\overrightarrow{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ антикоммутативно;

2. $\lambda[\overrightarrow{a}, \vec{b}] = [\lambda\overrightarrow{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}]$;

3. $[\overrightarrow{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\overrightarrow{a}, \vec{b}] + [\overrightarrow{a, c}]$;

4. Если $\overrightarrow{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны,то $[\overrightarrow{\vec{a}, b}] = 0$ или $[\overrightarrow{\vec{a}, a}] = 0$, так как $|[\overrightarrow{\vec{a}, a}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 0 = 0$;

5. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах сомножителях



$$S_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha = |[\vec{a}\vec{b}]|$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2} |[\vec{a}\vec{b}]|.$$

Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов . Смешанное произведение векторов.

Пусть вектор $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и вектор $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ найдём векторное произведение этих векторов

$[\vec{a}, \vec{b}] = [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] = x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] +$
$+x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + y_1y_2[\vec{j}, \vec{j}] + y_1z_2[\vec{j}, \vec{k}] + z_1x_2[\vec{k}, \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}, \vec{j}] +$
$+z_1z_2[\vec{k}, \vec{k}] = \{[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = 0\} = x_1y_2\vec{k} - x_1z\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} -$

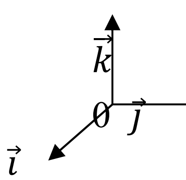
$$-z_1y_2\vec{i} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (-x_1z_2 + z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$=(y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (-x_1z_2 + x_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}\} = [\overrightarrow{a}, \vec{b}]$.

Вывод. Векторное произведение равно определителю третьего порядка, элементами которого являются базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (первая строка), координаты перемножаемых векторов x_1, y_1, z_1 (вторая строка); x_2, y_2, z_2 (третья строка).

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (30)$$

Замечание. Векторное произведение базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ находят по правилу правых и левых троек



$[\vec{i}\,\vec{j}] = \vec{k}$, $\quad [\vec{j}\,\vec{k}] = \vec{i}$;

$[\vec{i}\,\vec{k}] = -\vec{j}$, $\quad [\vec{k}\,\vec{i}] = \vec{j}$;

$[\vec{j}\,\vec{i}] = -\vec{k}$, $\quad [\vec{k}\,\vec{j}] = -\vec{i}$.

Пример 24. Сила $\vec{F}$ = {1, 0, 4 } приложена к точке C (1, 2, 3). Найти момент этой силы относительно точки D (1, 4, 5).

Решение. $\vec{M} = [\,\overrightarrow{DC}, \vec{F}]$,координаты вектора $\overrightarrow{DC}$ = {0, -2, -2}.

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Ответ: $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ = {-8,2,2}.

Пример 25. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}\,, \vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = 3$; $|\vec{n}| = 2$; угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 60^0.

Решение. $S_{\square} = |[2\vec{m} + 3\vec{n}\,, \vec{m} - \vec{n}]| = |[2\vec{m}\vec{m}] - 2\vec{m}\vec{n}] + [3\vec{n}\vec{m}] - [3\vec{n}\vec{n}]| = |5[\vec{n}\vec{m}]| = 5|\vec{n}| \cdot |\vec{m}| \cdot \sin 60^0 = 5\ 3{\cdot}2\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ кв.ед.

Ответ: $S_{\square} = 15\sqrt{3}$ ед. кв.

Пример 26. Вычислить площадь треугольника , вершины которого находятся в точках A (2,3,1); B (5, 6, 3); C (7, 1, 10).

Решение. $S_{\triangle} = \frac{1}{2} S_{\square} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, для этого из координат конца вычтем координаты начала, получим $\overrightarrow{AB}$ ={3,3,2}; $\overrightarrow{A\,C}$= {5,-2,9}.

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|31\vec{i} - 17\vec{j} - 21\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{31^2 + (-17)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1701}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}\sqrt{1701}$ ед. кв.

Смешанное произведение векторов.

Определение 30. Смешанным произведением 3-х векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $[\overrightarrow{\vec{a}, \vec{b}}]$ на вектор $\vec{c}$, $([\overrightarrow{\vec{a}, \vec{b}}], \vec{c})$.

Обозначается: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ или $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$.

Свойства смешанного произведения.

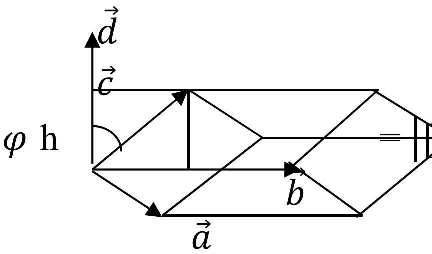
1) $([,], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}\,])$;

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}\,, \vec{a}, \vec{c}) = (\,\vec{b}, \vec{c}\,, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{c}\,, \vec{b}) = +(\overrightarrow{\vec{c}, \vec{a}}\,, \vec{b})$;

3) $(\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha\left(\overrightarrow{a_1}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) + \beta\left(\overrightarrow{a_2}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

Доказательство этих свойств следует из свойств определителей.

Геометрический смысл смешанного произведения ($\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$).



$\vec d = [\vec a, \vec b]$

$\left|\vec d\right| = S_{\square}$ По определению $([\vec a \vec b], \vec c) = \left|[\vec a \vec b]\right| \cdot |\vec c| \cdot \cos\varphi = S\ \cos\varphi \cdot |\vec c|_{\square}$ $=\{h = \cos\varphi \cdot |\vec c|\ \} = S_{\square} h = V.$

Угол φ может быть меньше $\frac{\pi}{2}$ или больше $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos\varphi < 0$ или $\cos\varphi > 0$, поэтому

$$(\vec a\, \vec b\, \vec c) = \pm V.$$

Вывод: Смешанное произведение векторов с точностью до знака равно объёму параллелепипеда , построенного на векторах сомножителях.

Координатная форма смешанного произведения.

Пусть даны вектор $\vec a = x_1\vec\imath + y_1\vec\jmath + z_1\vec k$ и вектор $\vec b = x_2\vec\imath + y_2\vec\jmath + z_2\vec k$; вектор $\vec c = \{x_3, y_3, z_3\}$. Найдем

$$[\vec a, \vec b] = \begin{vmatrix} \vec\imath & \vec\jmath & \vec k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec\imath \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec\jmath \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec k.$$

Известно, что скалярное произведение – это произведение одноимённых координат перемножаемых векторов, поэтому

$(\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$, с другой стороны это разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c). \qquad (31)$$

Используя формулу (31), можно доказать все свойства (1, 2, 3) смешанного произведения.

Пример 27. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках**:** $O(0,0,0)$; A(5,2,0); B(2, 5, 0); C(1,2,4).

Решение. Объём пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, то есть

$$V_{пир.} = \frac{1}{6} V_{пар.} = \pm\, (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \pm \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \pm\, (100 - 16) = 84 \text{ куб.ед.}$$

Ответ: $V_{пир.}$ = 84 куб. ед.

Условие компланарности векторов.

Теорма. Необходимым и достаточным условием компланарности 3-х векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Доказательство необходимости. Пусть $\vec a, \overrightarrow{b}, \vec c$ компланарны, значит построить параллелепипед на них нельзя, то есть объём равен нулю V=0, а это значит и $(\overrightarrow{a}\, \overrightarrow{b}\, \vec c)$ =0.

Доказательство достаточности. Пусть $(\vec a\, \overrightarrow{b}\, \vec c) = 0$ это значит, что V=0 и векторы $\vec a, \overrightarrow{b}, \vec c$ лежат в одной плоскости, то есть компланарны.

Вывод: Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 28. Проверить лежат ли четыре точки в одной плоскости А (2, -1, 1); В(5, 5, 4); С(3, 2, -1); Д(4, 1, 3).

Решение. Надо проверить лежат ли 3 вектора $\overrightarrow{\text{АВ}}, \overrightarrow{\text{АС}}, \overrightarrow{\text{АД}}$ в одной плоскости, для этого найдём координаты этих векторов

$\overrightarrow{\text{АВ}}$ = {3, 6, 3}; $\overrightarrow{AC}$={1, 3,-2}; $\overrightarrow{AД =}\{2, 2, 2\}$. Вычислим смешанное произведение этих векторов

$$(\overrightarrow{A\text{В}}, \overrightarrow{\text{АС}}, \overrightarrow{\text{АД}}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 24 + 6 - 18 - 12 + 12 = 18 \neq 0.$$

Вывод. Эти точки не лежат в одной плоскости.

Определение 74. Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется векторное произведение $[\overrightarrow{\vec{a}, \vec{b}}], \vec{c}]$ или $[\vec{a}, \vec{b}] \times \vec{c}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ делил пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 2. Точка 0 является центром тяжести треугольника АВС.

Доказать, что $\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{OC}} = \mathbf{0}.$

Задача 3. Найти сумму и разность векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}$.

Задача 4. Дан вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 5$. Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60^0. Найти $|\vec{c}|$.

Задача 5. Даны 3 вектора $\vec{a} = \{3, -1\}$, $\vec{b} = \{1, -2\}$; $\vec{c} = \{-1{,}7\}$. Определить разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Аналитическая геометрия

1.17. Основные понятия

Аналитическая геометрия имеет своей задачей изучение свойств геометрических объектов при помощи аналитического метода. В основе этого метода лежит метод координат, впервые применённый Декартом (великий французский математик и философ 1596-1650). Начальные (основные) понятия аналитической геометрии – точка, прямая линия, плоскость, поверхность.

Понятие об уравнении линии.

Определение 75. Линия L – это геометрическое множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) == 0. \tag{32}$$

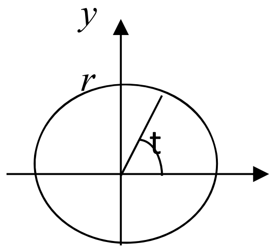
Для более удобного построения линий L, часто вводят вспомогательную переменную или параметр t .

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} . \qquad (33)$$

Исключив из равенства (33) параметр t, перейдём к равенству (32).

Пример 29. Получить уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r.

Решение. Сделаем рисунок.



Из рисунка видно $\begin{cases} y = r\sin t = \psi(t) \\ x = r\cos t = \varphi(t) \end{cases}$ (34)

$0 \leq t \leq 2\pi$.

Эти уравнения (34) и есть параметрические уравнения окружности. Обе части уравнений (34) возведём в квадрат и сложим $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$. Получим, что $x^2 + y^2 = r^2$ – уравнение окружности с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом r.

Можно вывести уравнение циклоиды – это линия, которую описывает точка M, лежащая на окружности, если окружность без скольжения движется по прямой.

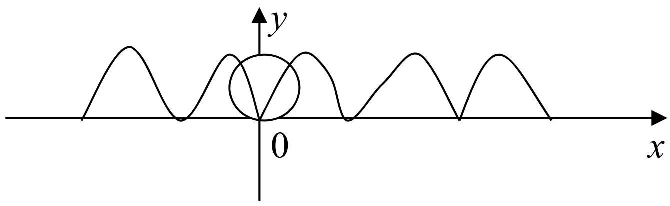


Рис. 10. Циклоида

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ x = R(1 - \cos t) \end{cases}, \text{R} - \text{ радиус окружности} .$$

Определение 76. Линия называется алгебраической, если в некоторой декартовой системе координат она определяется уравнением $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ – алгебраический полином (многочлен).

Определение 77. Алгебраическая линия называется линией порядка n, если $F(x, y)$ – многочлен n-ой степени, например: $F(x, y)$=Ax+By+C=0 – многочлен 1-ой степени; $F(x, y)$=A $x^2 + By^2 + Cxy + D = 0$ – многочлен 2-ой степени; $F(x, y)$=A$x^3 + By^3 + Cx + Dxy = 0$ – многочлен 3-й степени.

Определение 78. Всякая неалгебраическая линия называется трансцендентной.

1.18. Уравнение поверхности и линии в пространстве R^3

Определение 79. Уравнение $F(x, y, z)=0$ называется уравнением поверхности S относительно декартовой системы координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты x, y, z, любой точки, лежащей на поверхности S.

Например, пусть точка $M(x,y,z)$ принадлежит поверхности S с цетром в точке $C(a,b,c)$, тогда норма вектора $||MC|| = r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, отсюда $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ – уравнение сферической поверхности.

Определение 80. Линия в R^3 определяется, как пересечение 2-х поверхностей.

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

1.19. Различные виды уравнения прямой на плоскости R^2

Общее уравнение прямой.

Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1)$; $M(x, y,)$ и вектор $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$, перпендикулярный прямой M_1M. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$. В силу перпендикулярности $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{N}$, получим $(\overrightarrow{M_1M}, \vec{N})=0$ или $A(x-x_1) + B(y - y_1) = 0$, раскроем скобки $Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0$, обозначим $(-Ax-By)=C$, отсюда общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0 \tag{35}$$

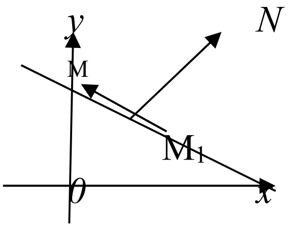


Рис. 11. К составлению общего уравнения прямой

Неполные уравнения прямой на плоскости.

Из общего уравнения прямой следуют несколько частных случаев:

1) C=0, Ax+By=0 – прямая проходит через начало координат.
2) B=0, Ax+C =0 – прямая параллельна оси Oy.
3) A=0, By+C =0 – прямая параллельна оси Ox.
4) B=C=0, Ax=0, x=0 – ось Oy.
5) A=C=0, By =0, y=0 – ось Ox.

Уравнение прямой в отрезках.

Запишем общее уравнение прямой $Ax+By+C=0 \Rightarrow Ax+By=-C$, разделим обе части на величину $C \neq 0$, получим $\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$, обозначим $\frac{-C}{A} = a$, $\frac{-C}{B} = b$, получим

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках, *a* и *b* – отрезки, отсекаемые прямой от соответствующих осей координат О*x*, О*y*.

Пример 29. Привести уравнение прямой 3х+5у+20= 0 к уравнению в отрезках.

Решение. Перенесём свободный член вправо и разделим обе части равенства на (-20), получим: $\frac{3x}{-20}+\frac{5y}{-20}=1$ или $\frac{x}{\frac{-20}{3}}+\frac{y}{\frac{-20}{5}}$ =1, $a=\frac{-20}{3}$, $b=\frac{-20}{5}$.

Ответ. $\frac{x}{\frac{-20}{3}}+\frac{y}{\frac{-20}{5}}$ =1 .

Каноническое уравнение прямой. Параметрические уравнения.

Определение 81. Вектор, коллинеарный прямой *L*, называется направляющим вектором прямой и обозначается $\vec{S}(l,m)$.

Пусть точки $M_1(x_1,y_1)$ и *M*(*x*, *y*) принадлежат прямой *L*, $\vec{S}=\{l,m\}$ – направляющий вектор прямой . Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}\{x-x_1,y-y_1\}$ и $\vec{S}(l,m)$. В силу построения $\overrightarrow{M_1M}\parallel\vec{S}$. Следовательно, из условия коллинеарности векторов, получим каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}. \tag{36}$$

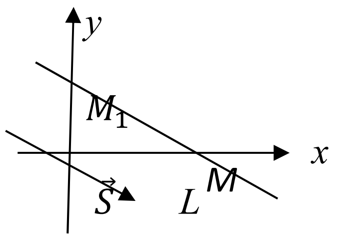


Рис. 12. К составлению канонического уравнения прямой

Из канонического уравнения прямой следуют несколько частных случаев:

1) Если $l=0$, то $\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{m}$ прямая параллельна оси *Oy*;
2) Если m=0, то $\frac{x-x_1}{l}==\frac{y-y_1}{0}$ прямая параллельна оси Ох.

Обозначим $\begin{cases}\frac{y-y_1}{m}=t\\ \frac{x-x_1}{l}=t\end{cases}$, получим параметрические уравнения прямой

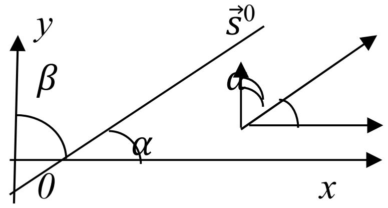
$$\begin{cases} x=lt+x_1\\ y=mt+y_1\end{cases}. \tag{37}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Пусть даны две точки, лежащие на прямой и пусть задан направляющий вектор прямой: $M_1(x_1,y_1)$; $M_2(x_2,y_2)$; $\vec{S}(l$,m); пусть $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M}$, тогда уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{38}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.



k=tgα, $\overrightarrow{s^0}=\left|\overrightarrow{s^0}\right|\cdot\cos\alpha\cdot\vec{\imath}+\left|\overrightarrow{s^0}\right|\cos\beta\cdot\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{s^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$, т. е. $\ell=\cos\alpha$, $m=\cos\beta$.

Рис. 13. К составлению уравнения прямой с угловым коэффициентом

Воспользуемся каноническим уравнением прямой (36), подставим вместо ℓ и m в (36) $cos\alpha$ и $cos\beta$, получим $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}$, т. к. $\cos\beta=\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$, следовательно $\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x-x_1)=y-y_1$ или tg$\alpha\,(x-x_1)=y-y_1$, окончательно имеем уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через одну точку

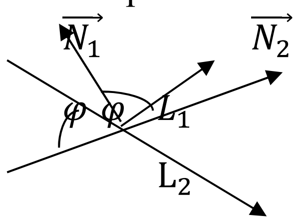
$$y-y_1=\kappa(x-x_1). \tag{39}$$

Часто это уравнение называют уравнением пучка прямых. Раскроем в последнем уравнении скобки $y=kx+(-x_1k+y_1)$. Выражение в скобках обозначим через b, это постоянное число, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом, где b отрезок, который прямая отсекает от оси координат Oy

$$y=kx+b. \tag{40}$$

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности, перпендикулярности двух прямых.

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями: $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$; $\overrightarrow{N_1}\{A_1,B_1\}$ и $\overrightarrow{N_2}\{A_2,B_2\}$ – нормальные векторы соответствующих прямых.



$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2})}{|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|}$$

Рис. 14. Угол между прямыми

Из формулы угла между двумя прямыми следуют несколько частных случаев:

1) Если $L_1\parallel L_2$, то и $\overrightarrow{N_1}\parallel\overrightarrow{N_2}\Rightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\longrightarrow$ – условие параллельности прямых;

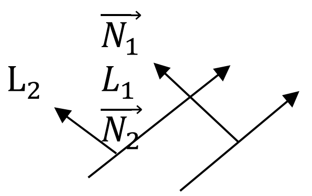
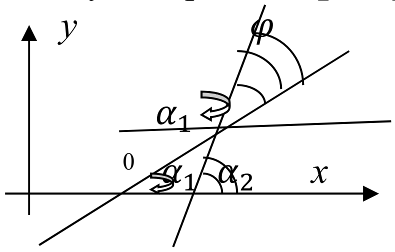


Рис. 15. Угол между параллельными прямыми

2) Если $L_1 \perp L_2$, то $\cos\varphi = 0$, это значит $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ – условие перпендикулярности прямых

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы своими каноническими уравнениями соответственно: $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1}$ и $\frac{x-x_1}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}$, $\overrightarrow{S_1} = \{l_1, m_1\}$, $\overrightarrow{S_2} = \{l_2, m_2\}$, тогда $\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2})}{|\overrightarrow{S_1}||\overrightarrow{S_2}|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$. С учетом этого условие параллельности прямых запишется: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$, а условие перпендикулярности прямых имеет вид: $l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом.



$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$

$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$

$= \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \mathrm{tg}\alpha_2}$, так как $\mathrm{tg}\alpha_2 = k_2$,

$\mathrm{tg}\alpha_1 = k_1$, то $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Рис. 16. Угол между прямыми

1) Если $L_1 \| L_2$, то $\mathrm{tg}0^0 = 0$ и $\mathrm{tg}\varphi = 0$, когда $k_2 - k_1 = 0$ или $k_2 = k_1$ – условие параллельности прямых;

2) Если же $L_1 \perp L_2$, то $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$, поэтому $1 + k_1k_2 = 0$ или $k_1k_2 = -1$, $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – условие перпендикулярности прямых.

Пример 30. Получить все виды уравнения прямой , если прямая задана общим уравнением 3x+4y-5=0.

Решение.

1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $4y = -3x + 5 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$, $k = \frac{3}{4}$;

2)Уравнение прямой в отрезках: $3x + 4y = 5 \Rightarrow \frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{4}} = 1$, $a = \frac{5}{3}$, $b = \frac{5}{4}$;

3) Каноническое уравнение прямой: возьмём 2 произвольные точки на прямой $M_1(0, \frac{5}{4})$ и $M_2(\frac{5}{3}, 0)$ вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\ \{\frac{5}{3}, \frac{-5}{4}\}$ является направляющим вектором прямой, каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_1 : $\frac{x-0}{\frac{5}{3}} = \frac{y - \frac{5}{4}}{\frac{-5}{4}}$;

4) Уравнение прямой, проходящей через две точки M_1, M_2: $\frac{x-0}{\frac{5}{3} - 0} = \frac{y - \frac{5}{4}}{0 - \frac{5}{4}}$.

1.20. Расстояние от точки до прямой. Различные виды уравнения плоскости

Расстояние от точки до прямой.

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, из рисунка 17 видим что $\vec{d} = \overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\,\vec{\imath} + (y_0 - y_1)\,\vec{\jmath}$, $\vec{N} \parallel \vec{d}$, $(\vec{N},\vec{d}) = |\vec{N}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\varphi$; $\varphi = 0$ или π, $\cos\varphi = \pm 1 \Rightarrow (\vec{N} \cdot \vec{d}) = \pm|\vec{N}| \cdot |\vec{d}|$. В координатной форме скалярное проиведение равно $(\vec{N},\vec{d}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)$, так как точка $M_1 \in L$, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой поэтому

$A x_1 + By_1 + C = 0$ или $A x_1 + By_1 = -C$, подставим $(\vec{N},\vec{d}) = A x_0 + By_0 + C = \pm|\vec{N}| \cdot |\vec{d}|$ отсюда находим $|\vec{d}| = \pm\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{|\vec{N}|}$ или

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (41)$$

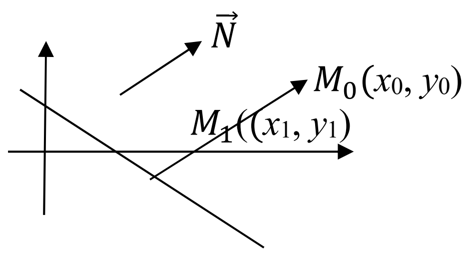


Рис. 17. Расстояние от точки до прямой

Вывод. Чтобы найти расстояние от точки до прямой, нужно в общее уравнение прямой подставить координаты точки, взять по абсолютной величине и разделить на модуль нормального вектора прямой.

Пример 31. Треугольник задан своими вершинами $A(1, 2)$; $B(-2, 1)$; $C(3, 2)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины A.

Решение. Обозначим высоту треугольника через h = AK. Найдём ее, как расстояние от точки A до прямой BC. Уравнение прямой BC: $\dfrac{x+2}{3+2} = \dfrac{y-1}{2-1} \Longrightarrow \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{1}$ или $x - 5y + 7 = 0$. Тогда $h = \dfrac{|1-5\cdot 2+7|}{\sqrt{1+25}} = \dfrac{2}{\sqrt{26}}$.

Ответ. $h = \dfrac{2}{\sqrt{26}}$ ед. дл.

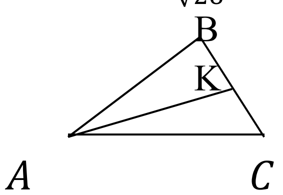


Рис. 18. Расстояние от точки до прямой к решению примера 31

Уравнение пучка прямых.

Определение 82. Совокупность прямых, лежащих в плоскости и проходящих через одну точку называется пучком прямых с центром в этой точке.

Пучок прямых можно задать уравнением с угловым коэффициентом: y- y_0 =k(x- x_0) , а также с помощью общего уравнения двух прямых: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ в виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (42)$$

Пример 32. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельно прямой $x + 3y = 0$.

Решение. Запишем уравнение пучка $5x - y + 10 + \lambda\ (8x + 4y + 9) = 0$.

$\overrightarrow{N_1} = \{5 + 8\lambda; 4\lambda - 1\}$, $\vec{N} = \{1; 3\}$. Векторы $\overrightarrow{N_1}$ и $\vec{N}$ параллельны, в координатах $\frac{5+8\lambda}{1} = \frac{4\lambda-1}{3}$ отсюда $15 + 24\lambda\ 4\lambda + 1 = 0$ или $20\lambda + 16 = 0 \ \rightarrow \lambda = \frac{-16}{20} = \frac{-4}{5}$, $(5 - \frac{32}{5})\ x - (\frac{16}{5} + 1)y + \left(10 - \frac{36}{5}\right) = 0 \Rightarrow \quad x + 3y + 2 = 0.$

1.21.Различные виды уравнения плоскости в $\boldsymbol{R}^3$

Векторное уравнение плоскости.

Пусть плоскость задана общим уравнением, вектор $\overrightarrow{\mathrm{M_0M}}$ принадлежит плоскости, а вектор $\vec{\mathrm{N}}$ – нормаль к плоскости. Тогда $\overrightarrow{\mathrm{M_0M}} \perp \vec{\mathrm{N}} \rightarrow (\overrightarrow{\text{?}_0\text{?}}, \vec{\mathrm{N}}) = 0$. Из рисунка 19 видно $\overrightarrow{\mathrm{M_0M}} = \vec{\mathrm{r}} - \overrightarrow{\mathrm{r_0}}$, поэтому $\left(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}, \vec{N}\right) = 0$– векторное уравние плоскости.

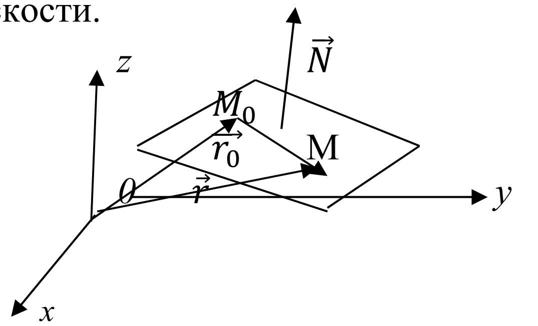


Рис. 19. К составлению векторного уравнения плоскости

Уравнение плоскости , проходящей через данную точку. Общее уравнение плоскости.

Пусть даны две точки плоскости $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1)$; M(($x$, y, z)) и вектор $\vec{N}$={A, B, C}, перпендикулярный плоскости, тогда $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{N}$, следовательно $\left(\overrightarrow{M_1M}, \vec{N}\right) = 0$.

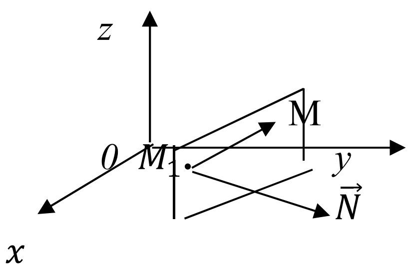


Рис. 20. К составлению общего уравнения плоскости

Из скалярного произведения векторов в координатной форме имеем уравнение плоскости проходящей через заданную точку или уравнение связки плоскостей $(x - x_1)A + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$.

Раскроем скобки в последнем равенстве Аx+Вy+Сz – (А$x_1 + By_1 + Cz_1$) $=$ 0. Выражение в скобках обозначим через D, получим общее уравнение плоскости.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{42}$$

Неполные уравнения плоскости.

В общем уравнении плоскости (42) полагаем:

1) $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$, плоскость проходит через начало координат.

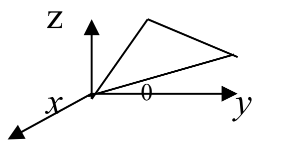


Рис. 21. К составлению общего уравнения плоскости

2) $A = 0$, $By + Cz + D = 0$, плоскость параллельна оси Ox.

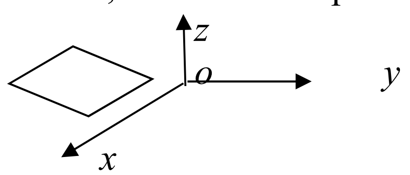


Рис. 22. Плоскость, параллельная оси Ox

3) $A = D = 0$, $By + Cz = 0$, плоскость проходит через ось Ox.

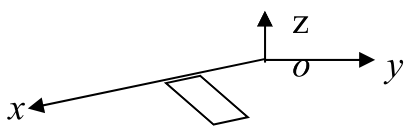


Рис. 23. Плоскость, проходящая через ось Ox

4) $B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$, плоскость параллельна оси Oy.

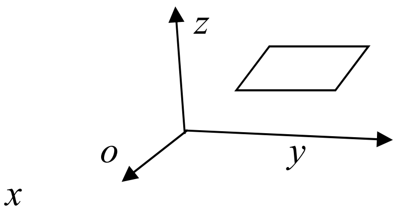


Рис. 24. Плоскость, параллельная оси Oy

5) $B = D = 0$, $Ax + Cz = 0$, плоскость проходит через ось Oy.

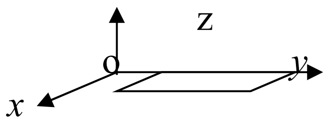


Рис. 25. Плоскость, проходящая через ось Oy

6) $C = 0$, $Ax + By + D = 0$, плоскость параллельна оси Oz.

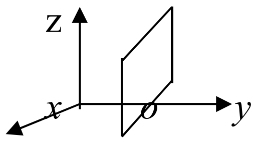


Рис. 26. Плоскость, параллельная оси Oz

7) $C = D = 0$, $Ax + By = 0$, плоскость проходит через ось oz.

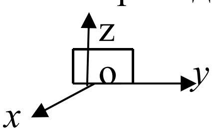


Рис. 27. Плоскость, проходящая через ось Oz

8) $A = B = 0$, $Cz + D = 0$, плоскость параллельна координатной плоскости XOY.

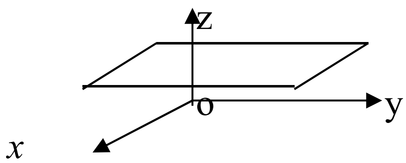


Рис. 28. Плоскость, параллельная координатной плоскости XOY

9) $A = C = 0$, $By + D = 0$, плоскость параллельна координатной плоскости XOZ.

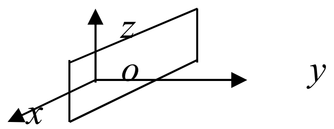


Рис. 29. Плоскость параллельная координатной плоскости *XOZ*

10) $B = C = 0$, $Ax + D = 0$, плоскость параллельна координатной плоскости *YOZ*.

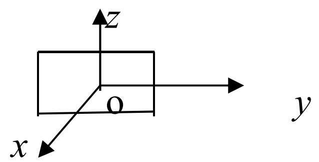


Рис. 30. Плоскость, параллельная координатной плоскости *YOZ*

11) $A = B = D = 0$, $Cz = 0$ или $z = 0$, координатная плоскость XOY.

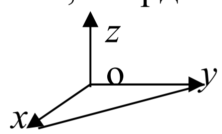


Рис. 31. Координатная плоскость *XOY*

12) $B = C = D = 0$, $Ax = 0$ или $x = 0$, координатная плоскость *YOZ*.

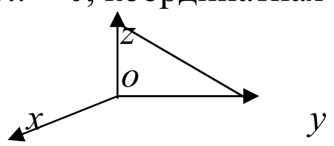


Рис. 32. Координатная плоскость *YOZ*

13) $A = C = D = 0$, By $= 0$ или $y = 0$, координатная плоскость *XOZ*.

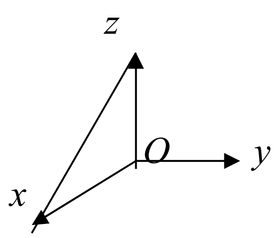


Рис. 33. Координатная плоскость *XOZ*

Пример 33. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось *Ox* и точку M(1, 2, 3).

Решение. Уравнение плоскости имеет вид $By + Cz = 0$; найдём *B* и *C*. Подставим координаты точки в это уравнение $2B + 3C = 0 \Rightarrow B = \frac{-3}{2}C$ подставляем в уравнение $\frac{-3}{2}\text{C}y + Cz = 0$, сокращаем на С, окончательно получаем $3y - 2z = 0$.

Уравнение плоскости в отрезках.

Рассмотрим общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Перенесём свободный член D вправо и разделим на D: $\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$, обозначим $\frac{-D}{A} = a$, $\frac{-D}{C} = c$, $\frac{-D}{B} = b$, уравнение примет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ уравнение плоскости в отрезках, где a, b, c – отрезки, которые плоскость отсекает от соответствующих осей координат.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (43)$$

Пример 34. Построить плоскость $2x + 5y - 10 = 0$. Приведём это уравнение к уравнению в отрезках $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$. На оси Ox отложим отрезок $a = 5$, на оси Oy отложим отрезок $b = 2$.

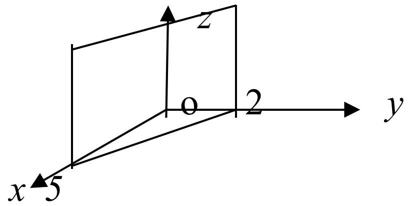
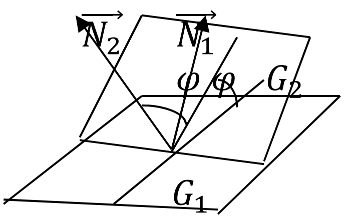


Рис. 34. К составлению уравнения плоскости в отрезках в примере 34

Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

Пусть плоскости заданы общими уравнениями G_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и G_2: $A_2x + B_2y + C_2z = 0$. Тогда угол между двумя плоскостями определяется формулой (44).



$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2})}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2}\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2}}. \qquad (44)$$

Рис. 35. К составлению уравнения угла между плоскостями

1) Если $G_1 \perp G_2$, то $(N_1, N_2) = 0$ или в координатной форме: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ – условие перпендикулярности плоскостей;

2) Если $G_1 \parallel G_2$, то $\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2}$ или в координатной форме: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ – условие параллельности плоскостей.

Пример 35. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-2, 1, 4)$ параллельно плоскости $3x + 2y - 7z + 8 = 0$.

Решение. $3(x+2y) + 2(y-1) - 7(z-4) = 0$.

Ответ. $3x + 2y - 7z + 14 = 0$.

Пример 36. Через точку $M_1(-2,3,6)$ провести плоскость, перпендикулярную двум плоскостям $\begin{cases} 2x + 2y - 2z - 4 = 0 \\ 3x + 5y + z = 0 \end{cases}$.

Решение. Уравнение плоскости находим по формуле уравнения плоскости, проходящей через точку, т. е. $A(x + 2) + B(y - 3) + C(z - 6)=0$. Из рисунка 36 видно, что нормальный вектор искомой плоскости перпендикулярен нормальным векторам данных плоскостей. $\vec{N} \perp \vec{N_1}, \vec{N_2}$, поэтому

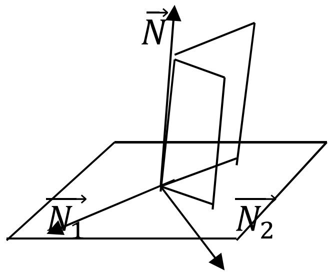


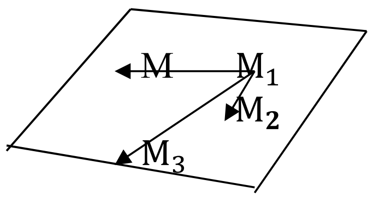
Рис. 36. К составлению уравнения плоскости, перпендикулярной двум плоскостям в примере 36

$$\vec{N} = [\vec{N_1}\,\vec{N_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 13\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}.\ \vec{N} = \{13, -8, 1\}.$$

Ответ. $13x - 8y + z + 44 = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через 3 различные точки, нележащие на одной прямой.

Пусть даны три фиксированные точки, лежащие в плоскости и текущая точка плоскости: $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2; y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$; $M(x, y, z)$.



Построим три вектора, исходящие из точки M_1 Тогда условие принадлежности трех векторов одной плоскости равносильно равенству нулю смешанного произведения этих векторов, т. е. $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$.

Рис. 37. К составлению уравнения плоскости, проходящей через 3 различные точки, не лежащие на одной прямой

Или в координатах, уравнение плоскости, проходящей через 3 различные точки, не лежащие на одной прямой, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (45)$$

Формула (45) определяет уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Пример 37. Получить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $M_1(1\,,-1\,,0\,)$; $M_2\,(\,2\,,1\,,-3\,)$; $M_3\,(\,-1\,,0\,,1\,)$.

Решение. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{M_1M} = \{\,x-1, y+1\,, z-0\}$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1\,,2\,,-3\}$; $\overrightarrow{M_1M_3} = \{\,-2\,,1\,,1\,\}$. Уравнение плоскости, воспользовавшись (45) запишем в виде: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 0, раскрываем определитель третьего порядка по элементам первой строки, получаем $(x$-1)5 – $(y$+1)(-5) + z 5 =0 или $5x+5y+5z=0$.

Ответ. $x+y+z=0$.

Уравнение плоскости в нормальном виде.

Пусть даны две точки M_0 и M плоскости, заданной общим уравнением, Построим векторы $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$ и $\overrightarrow{N^0} = \{\cos\alpha\,, \cos\beta\ \ ,\ \ \cos\gamma\}$, тогда $(\ \vec{r} - \vec{r_0}\,, \overrightarrow{N^0}) = 0.$ Получим $\overrightarrow{N^0} = \left|\overrightarrow{N^0}\right| \cos\alpha\ \vec{i} + \left|\overrightarrow{N^0}\right| \cos\beta\,\vec{j}\ +\ \left|\overrightarrow{N^0}\right| \cos\gamma\,\vec{k},$ где $\vec{r_0} = \{x_0\,, y_0, z_0\}$, $\vec{r}\{x, y, z\}$.

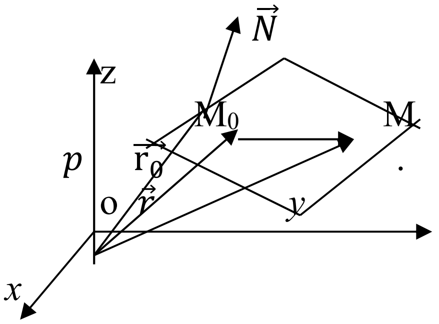


Рис. 38. К составлению уравнения плоскости в нормальном виде

Из геометрических соображений (рис. 38) имеем $(\vec{r}\,, \overrightarrow{N^0}) - (\vec{r_0}, \overrightarrow{N^0}) = 0$, т.к. $(\vec{r_0}, \overrightarrow{N^0}) = |\vec{r_0}| \cdot \left|\overrightarrow{N^0}\right| \cdot \cos\varphi\ \left\{\left|\overrightarrow{N^0}\right| = 1\right\} = |\vec{r_0}| \cos\varphi = \text{пр}_N\, \vec{r_0} = p$. Подставим полученные результаты в скалярное произведение и перейдём к координатам

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (46)$$

Уравнение (46) определяет нормальное уравнение плоскости, где величина p равна ортогональной проекции радиуса вектора фиксированной точки плоскости на единичный вектор нормали.

Расстояние от точки до плоскости.

Формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости, получим решая следующую задачу:

Найти расстояние от точки $M_1(x_1\,, y_1\,, z_1)$ до плоскости Q: $Ax+By+Cz+D=0$.

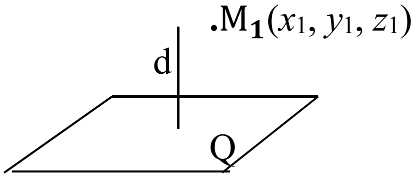


Рис. 39. Расстояние от точки до плоскости

Решение. Воспользуемся формулой (46), которую применим без доказательства:

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (47)$$

Формула (47) определяет расстояния от точки до плоскости.

Пример 38. Найти расстояние от точки $M_0(1\,,0\,,3\,)$ до плоскости 3x+4y+5z+3=0.

Решение. Подставим в формулу 47 исходные данные, получим $d = \frac{|3\cdot1+4\cdot0+5\cdot3+3|}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{21}{\sqrt{50}}$.

Ответ. $d = \frac{21}{5\sqrt{2}}$ ед. дл.

1.22. Прямая в пространстве R^3

Линию в пространстве рассматривают, как множество всех точек, принадлежащих двум пересекающимся поверхностям $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$.

Например: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ z=3 \end{cases}$ при пересечении сферы и плоскости получаем окружность, а прямую линию – при пересечении двух плоскостей.

Общее уравнение прямой в R^3.

Уравнение, заданное пересечением двух плоскостей определяет прямую линию в пространстве

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}. \qquad (48)$$

Уравнение (48) называется общим уравнением прямой в пространстве.

Пример 39. Построить прямую $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-3y-z+5=0 \end{cases}$.

Решение. Чтобы построить прямую, надо задать две точки, для этого найдём точки пересечения прямой с координатными плоскостями.

1) $z=0$, $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-3y+5=0 \end{cases}$ решаем эту систему, находим точку пересечения $M_1(1\,,2\,,0\,)$.

2) $x=0$, $\begin{cases} y+z=3 \\ -3y-z=-5 \end{cases} \Rightarrow M_2(0\,,1,2\,)$.

Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения.

Пусть прямая L задана точкой $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и направляющим вектором $\vec{S}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{0M_1}+\overrightarrow{M_1M}$; $\overrightarrow{M_1M}\parallel\vec{S}$, поэтому $\overrightarrow{M_1M}=t\cdot\vec{S}$, где t – скалярный параметр $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{r_1}$, $\vec{r}=\overrightarrow{r_1}+t\vec{S}$ – векторное уравнение прямой, где $\vec{r}=\{x,y,z\}$; $\overrightarrow{r_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$; $t\vec{S}=\{tm,tn,tp\}$. В координатах векторное уравнение запишется в виде:

$$\begin{cases} x=x_1+tm \\ y=y_1+tn \\ z=z_1+tp \end{cases}. \qquad (49)$$

Уравнения (49) представляют собой параметрические уравнения прямой.

Т.к. вектор $\overrightarrow{\mathrm{MM_1}}=\{x\text{-}\ x_1,\ \ y-y_1, z-z_1\}\parallel \vec{S}$, то в координатной форме получим уравнения:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \tag{50}$$

Уравнения (50) являются каноническими уравнениями прямой.

Пример 40. Привести уравнение прямой к каноническому виду $\begin{cases}2x+3y-z+8=0\\ x-3y+2z+1=0\end{cases}$

Решение. Из общих уравнений плоскостей получим соответствующие нормальные векторы плоскостей $\overrightarrow{N_1}=\{2{,}3,-1\}$; $\overrightarrow{N_2}=\{1,-3{,}2\}$, тогда направляющий вектор прямой определяется вектором $\vec{S}=[\overrightarrow{N_1,N_2}]=\begin{vmatrix}\vec{\iota} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=3\vec{\iota}-5\vec{j}-9\vec{k}.$

Чтобы найти точку на прямой, в ее общем уравнении (48) положим z=0, получим $\begin{cases}2x+3y=-8\\ x-3y=-1\end{cases}$, решив эту систему уравнений, будем иметь $\mathrm{M}_1\left(-3,-\frac{2}{3},0\right)$ и запишем каноническое уравнение прямой

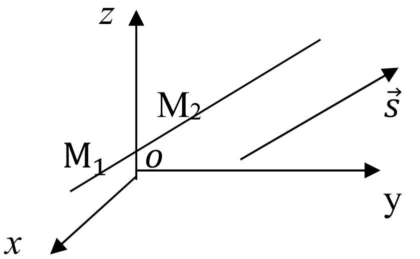
$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-5}=\frac{z-0}{9}.$$

Ответ.

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-5}=\frac{z-0}{9}.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть точки $\mathrm{M}_1(x_1,y_1,z_1)$; $M_2(x_2,y_{2,}z_2)$ принадлежат порямой, уравнение которой нужно составить. Соединим эти точки прямой вектором :



$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\};$$

вектор $\overrightarrow{S=}\{m,n,p\}$: $\overrightarrow{M_1M_2}\parallel\vec{S}$. Тогда справедливо:

Рис. 40. К составлению уравнения прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{51}$$

Равенство (51) определяет уравнение прямой,проходящей через две заданные точки.

Пример 41. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1, 2, 3)$, параллельно прямой $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 1 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 - 0 \end{cases}$.

Решение. Уравнение прямой будем искать в каноническом виде (51):

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

За направляющий вектор $\vec{s}$ можно принять вектор, как векторное произведение нормальных векторов плоскостей, задающих прямую, т. е.

$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 23\,\vec{i} + 13\,\vec{j}\ \ 17\,\vec{k}$. Подставим в уравнение (51), получим

$$\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17}.$$

Ответ.

$$\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17}.$$

Пример 42. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{M}_1(-4, 0, 2)$, перпендикулярно прямым L_1 : $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ и L_2 : $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$.

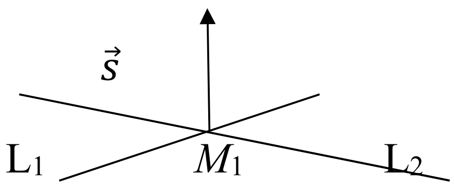


Рис. 41. К составлению уравнения прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно прямым

Решение. Запишем канонические уравнения прямой (51) $\frac{x+4}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-2}{p}$. Направляющий вектор прямой $\vec{S}$ одновременно перпендикулярен и направляющему вектору $\overrightarrow{S_1 =} \{2,3,4\}$ и $\overrightarrow{S_{2=}}\{3,2,2\}$, поэтому $\vec{S} = [\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} + \quad + 8\vec{\jmath} - \ 5\vec{k}$.

Ответ. $\frac{x+4}{-2} = \frac{y-0}{8} = \frac{z-2}{-5}$

1.23. Взаимное расположение прямой и плоскости в R^3. Полярная система координат

Взаимное расположение 2-х прямых.

1) Пусть даны прямые $L_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $L_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$. Тогда косинус угла между ними определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{{m_1}^2 + {n_1}^2 + {p_1}^2}\,\sqrt{{m_2}^2 + {n_2}^2 + {p_2}^2}} \tag{52}$$

2) Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

3) Условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости.

1) Угол между прямой и плоскостью. Пусть прямая задана уравнением L: $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$, а плоскость уравнением: $Ax+By+Cz+D=0$. Найдем угол между прямой L и плоскостью. Согласно рисунку 42 косинус угла между нормалью к плоскости и направляющим вектором прямой определяется равенством $\cos\psi = \cos(90^0 - \varphi) = \sin\varphi$.

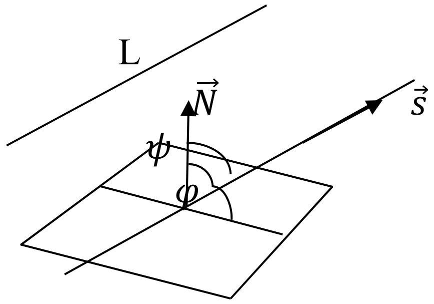


Рис. 42. Взаимное расположение прямой и плоскости

Выражая косинус угла через скалярное произведение, получаем формулу для вычисления косинуса угла между прямой и плоскостью

$$\cos\psi = \sin\varphi = \frac{(\vec{S}\cdot\vec{N})}{|\vec{N}|\cdot|\vec{S}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \qquad (53)$$

2) Условие параллельности прямой и плоскости. Так как векторы $\vec{S} \perp \vec{N}$, то получим

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

3) Условие перпендикулярности прямой и плоскости. Так как векторы $\vec{N}\,\|\,\vec{S}$, то получим

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Пример 42. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$$

и плоскости, заданной уравнением: $x+2y+3z-29 = 0$.

Решение. Уравнение прямой запишем в параметрическом виде (50)
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases}.$$

Эти значения неизвестных подставим в уравнение плоскости: $2t + 2t + 2 + 6t - 3 - 29 = 0 \Longrightarrow 10t - 30 = 0 \Rightarrow t = 3$. Значение параметра $t=3$ подставим в параметрические уравнения прямой, получим $x = 6$, $y = 4$, $z = 5$ – координаты точки пересечения.

Ответ. $x = 6$, $y = 4$, $z = 5$.

4) Условия принадлежности прямой $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

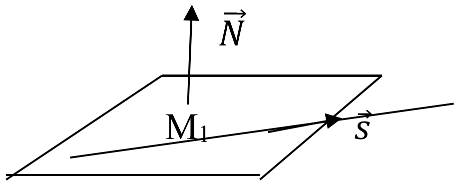


Рис. 43. К условию принадлежности прямой плоскости

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит плоскости,а вектор $\vec{N}$ перпендикулярен вектору $\vec{s}$, поэтому

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Am + Bn + Cp = 0 \end{cases} \qquad (54)$$

5) Условия принадлежности двух прямых $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ плоскости. Воспользуемся условием принадлежности трёх векторов одной плоскости. Опираясь на понятие компланарных векторов это условие может быть записано:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (55)$$

Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве.

1) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярно данной плоскости Ax + By +Cz + D = 0

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}.$$

2) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно заданной плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0.$

3) Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярно прямой

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$

и, следовательно,

$m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0.$

4) Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$

и через заданную, не лежащую на прямой, точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, A, B, C находим из условий:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0 \end{cases}$$

Полярная система координат.

Определение 83. Полярная система координат состоит из начала координат – точки *O*, называемой полюсом и луча *OM*, соединяющим полюс с произвольной точкой *M* плоскости. Вектор $|OM| = \rho$ называется полярным радиус – вектором точки *M*, а угол φ, образованный лучом *OM* и полярной осью – полярным углом точки *M*. Угол φ считается положительным при отсчёте от полярной оси против хода часовой стрелки.

Если точка М имеет полярные координаты $\rho > 0$ и $\varphi > 0,$ где $0 \le \varphi < 2\pi,$ то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho;\ \varphi + 2k\pi)$ и $[-\rho;\ \varphi + (2k\pi + 1)\pi],$ где $k\ \in Z.$

Рис. 44. Связь полярной и декартовой систем координат

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось *Ox* направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и её полярные координаты ρ и φ связаны следующими формулами (рис. 44):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} (1),\ \rho \ge 0\ ,0 \le \varphi < 2\pi,\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.\ (56)$$

Пример 43. Записать уравнение линии в декартовой системе координат: $\rho^2 = 8sin^2 2\varphi.$

Решение. Из формул (56) находим $\sin\varphi = \frac{y}{\rho}$, подставляем в уравнение кривой, а также из формул (56) подставляем ρ^2 , получаем $x^2 + y^2 = 8\ \frac{y^2}{\rho^2} = 8\ \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Возведём в квадрат обе части последнего равенства и приходим к уравнению $(x^2 + y^2)^3 = 64\ y^4.$

Пример 44. Записать уравнение линии в полярной системе координат $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 4\ (x^2 - y^2).$

Решение. Из формул (56) вместо x и y подставляем значения , получим $\rho = 4(2\ \cos 2\varphi - 1).$

Задание для самостоятельной работы.

Построить линии в полярной системе координат

1) $\rho = a\varphi -$ спираль Архимеда;
2) $\rho = \ \frac{a}{\varphi}$ – гиперболическая спираль;
3) $\rho = e^{a\varphi}$ – логарифмическая спираль;
4) $\rho^2 = \ a^2\ \cos 2\varphi -$ лемниската Бернулли;
5) $\rho = a\cos 2\varphi,\ \rho = a\sin 2\varphi$ – четырёхлепестковые розы;
6) $\rho = a\cos 3\varphi,$ – $\rho = a\sin 3\varphi$ –трёхлепестковые розы;.
7) $\rho = a(1 \pm \sin\varphi) -$ кардиоида;
8) $\rho = a(1 \pm \cos\varphi) -$ кардиоида.

1.24. Кривые второго порядка

Определение 84. Кривой второго порядка называется линия , определяемая уравнением второй степени $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

1. Окружность.

Определение 85. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от одной фиксированной точки, называемой центром.

Согласно определению 85, каноническое уравнение окружности может быть записано в виде $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, где C(a, b) – центр окружности, *r* – радиус окружности.

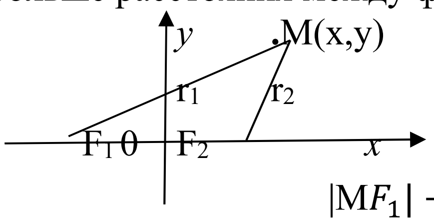
Пример 45. Привести уравнение окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ к каноническому виду.

Решение. Выделяем полные квадраты при переменных x и y, получаем $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 11 = 0 \Longrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$.

Ответ. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$, C (1,-2), $r = 4$.

2. Эллипс.

*Определение 85***.** Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух заданных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная (при условии, что эта величина больше расстояния между фокусами) (рис. 45).



$|MF_1| = r_1$; $|MF_2| = r_2$; $|F_1F_2| = 2c$;

$|MF_1| + |MF_2| = 2a$; $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

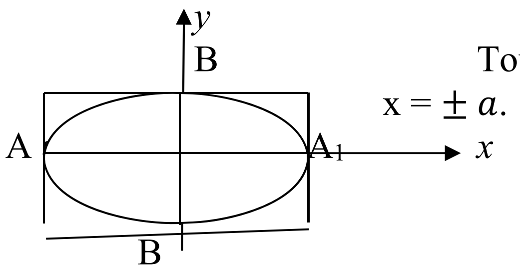
$|MF_1| + |MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Рис. 45. К определению эллипса

Фокусы эллипса имеют координаты F_1 (-c,0); F_2 (c;0).

После освобождения от квадратных корней и выполнения некоторых преобразований, получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a^2 - c^2 = b^2. \qquad (57)$$



Точки пересечения с осями: $x = 0$, $y = \pm b$, $y = 0$, $x = \pm a$. AA_1 – большая ось, BB_1 – малая ось.

Рис. 46. Эллипс

Определение 86. Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$ называется эксцентриситетом эллипса. Фокальные радиусы определяются уравнениями $r_1 = a + \frac{c}{a}x$, $r_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Пример 46. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, найти ε и фокусы.

Решение. Уравнение запишем в виде $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $a = 4, b = 2$, c=$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Чтобы построить эллипс, на осях координат отложим $2a = 8$ по оси *Ox*, 2*b* = 4 по оси *Oy*, построим прямоугольник со сторонами 8 и 4 и в него впишем эллипс.

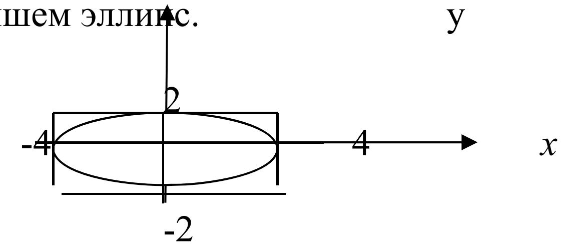


Рис. 47. К решению примера 46

3. Гипербола.

Определение 87. Гипербола – это геометрическое место точек абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от 2-х данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная (при условии, что эта величина не равна нулю и меньше расстояния между фокусами) (рис.48). $|MF_1 - MF_2| = 2a \Rightarrow \mathrm{M}F_1 - MF_2 = \pm 2a$. Выполнив преобразования, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (58)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$; 2b – мнимая ось; $2a$ – действительная ось, $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы; $\frac{c}{a} = \boldsymbol{\varepsilon} > 1$ – эксцентриситет гиперболы.

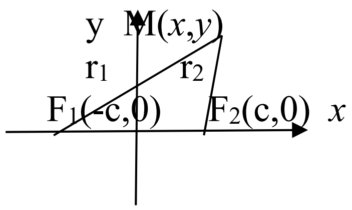


Рис. 48. К определению гиперболы

Гипербола симметрична относительно осей координат.

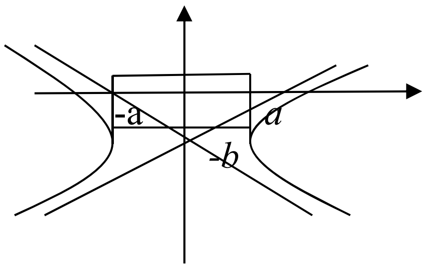


Рис. 49. Гипербола

Для построения гиперболы на оси Ox отложим величину отрезка равную $2a$, на оси Oy – $2b$. Построим прямоугольник с этими сторонами, проведем в нём диагонали – это асимптоты гиперболы.

Определение 88. Гипербола называется равнобочной, если выполняется равенство $a = b \Longrightarrow x^2 - y^2 = a^2$.

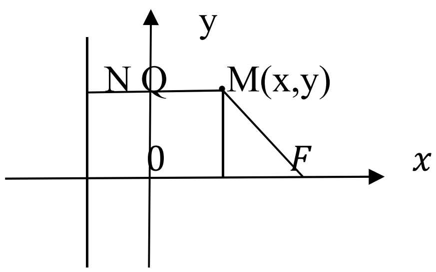
Определение 89. Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются сопряжёнными**.**

Фокальные радиусы определяются уравнениями

$$r_1 = |\varepsilon x - a|, r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

4. Парабола.

Определение 90. Парабола – множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой фокусом и данной прямой, называемой директрисой (фокус не лежит на директрисе) (рис. 15).



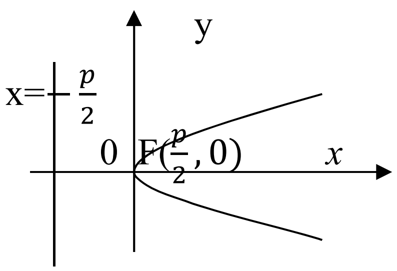
Уравнение директрисы: $\boldsymbol{x = -\frac{p}{2}}$**.** MN = MF.

$F(\frac{p}{2}, 0)$, $MN = QM + QN = \frac{p}{2} + x$,

$MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, приравняем

$\frac{p}{2} + x = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, возведём в квадрат

Рис. 50. К определению параболы



$\frac{p^2}{4} + px + x^2 = (\ x - \frac{p}{2})^2 + y^2$ или

$\frac{p^2}{4} + px + x^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$, получим

каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \qquad (59)$$

Рис. 51. Парабола

Если уравнение параболы имеет вид, $x^2 = 2py$**,** то парабола симметрична относительно оси *Oy*, а уравнение директрисы имеет вид у = $\frac{p}{2}$.

Пример 47. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение её директрисы и найти её фокус.

Решение. 2р = 6; р = 3, $x = \frac{p}{2} = -\frac{3}{2}$ – уравнение директрисы. $F(\frac{3}{2}, 0)$ – фокус.

1.25. Поверхности второго порядка

Определение 91. Поверхностью второго порядка называется геометрическое множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют алгебраичемкому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + \\ + a_4 = 0. \qquad (60)$$

1) Сфера.

Определение 92. Если в уравнении (56) отсутствуют члены с произведением переменных, а коэффициенты при квадратах равны, то это всегда уравнение сферы, его можно привести к каноническому виду:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2, \qquad (61)$$

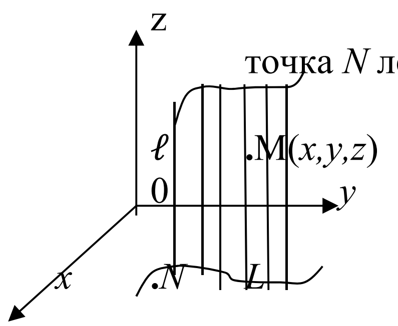
где С (x_1, y_1, z_1) – центр сферы, а R ее радиус.

2) Цилиндрические поверхности.

Определение 93. Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию *L* и параллельных данной прямой ℓ, называется цилиндрической поверхностью. При этом линия *L* –направляющая, а линия ℓ образующая поверхности.

Рассмотрим в плоскости *Oxy* некоторую линию *L*, заданную в системе координат уравнением вида *F*(*x*, *y*) = 0.

Покажем, что это уравнение цилиндрической поверхности.



Точка *N* – проекция точки *M* на плоскость *Oxy*, точка *N* лежит на *L* и удовлетворяет уравнению *F*(*x*, *y*) = 0 Точки *M* и *N* имеют одну и ту же абсциссу и ординату, и удовлетворяют уравнению *F*(*x*, *y*) = 0, так как оно не содержит *z*. Координаты другой точки не удовлетворяют уравнению *F*(*x*, *y*) = 0.

Рис. 52. К определению цилиндрической поверхности

Таким образом координаты любой точки цилиндрической поверхности удовлетворяют уравнению *F*(*x*, *y*) = 0, что и требовалось доказать.

Уравнение *F*(*x*, *y*) = 0 является уравнением цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси *Oz* и направляющей *L*, которая в плоскости *Oxy* задаётся тем же уравнением *F*(*x*, *y*) = 0. Аналогично, можно показать, что уравнение $F(x, y) = 0$ – уравнение цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси Oy, $F(x, y) = 0$ –уравнение цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси Ox.

Виды цилиндрических поверхностей:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический цилиндр с образующими параллельными оси Oz (рис. 53).

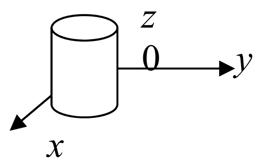


Рис. 53. Эллиптический цилиндр

Если $a = b$, то получим круговой цилиндр, уравнение которого $x^2 + y^2 = 1$.

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гиперболический цилиндр с образующими параллельными оси Oz (рис. 54).

3) $y^2 = 2pz$ – параболический – цилиндр, с образующими, параллельными оси Ox (рис. 55).

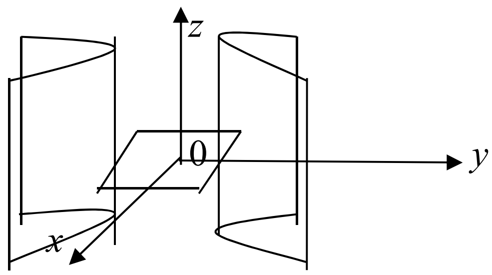


Рис. 54. Гиперболический цилиндр

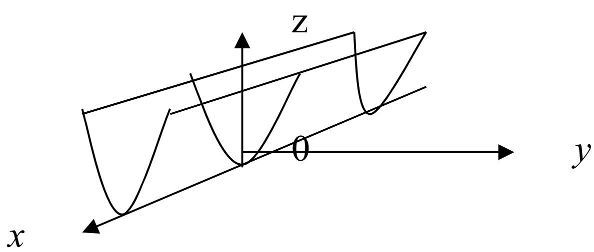


Рис. 55. Параболический цилиндр

4) Конические поверхности.

Определение 94. Поверхность, составленная из всех прямых , пересекающих линию L и проходящих через данную точку P, называется конической поверхностью. Линия L называется направляющей, точка P вершиной, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность – образующей.

Рассмотрим коническую поверхность с вершиной в начале координат и направляющей – эллипс.

$$\begin{cases} Z = C \\ \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \end{cases}. \qquad (62)$$

Это конус второго порядка.

Выберем произвольную точку M (x, y, z) и проведём образующую OM, пересекающую направляющую в точке N(X, Y, C). Уравнение прямой OM, прохо-

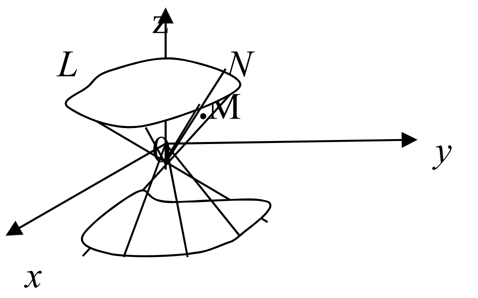


Рис. 56. Коническая поверхность

дящей через две точки $O(0, 0, 0)$ и $N(X, Y, C)$ имеет вид:

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-0}{Y-0} = \frac{z-0}{C-0} \text{ или}$$

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{C} \text{ отсюда}$$

$$X = \frac{Cx}{z} \text{ и}$$

$$Y = \frac{Cy}{z}$$

эти значения подставим в (62), получим каноническое уравнение конуса 2-го порядка, симметричного относительно оси Oz

$$\frac{C^2x^2}{a^2z^2} + \frac{C^2y^2}{b^2z^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0. \tag{63}$$

Если $a = b$, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0$$

– прямой круговой конус.

1.26. Построение поверхностей по их уравнениям методом сечений

1. Эллипсоид.

Определение 95. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{64}$$

называется эллипсоидом. Числа a , b , c называются полуосями эллипсоида.

Определим форму эллипсоида. Так как переменные x, y, z входят в уравнение в чётных степенях, то эллипсоид симметричен относительно осей Оx, Оy, Оz. Пересечём его плоскостью z=h.

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)2} = 1.$$

Обозначим через

$$\bar{a} = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{и } \bar{b} = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\ ,$$

из чего видно, что с возрастанием h, полуоси эллипса $\bar{a}$ и $\bar{b}$ уменьшаются.

Можно показать, что при пересечении плоскостями $x = h$ или $y = h$, тоже будут получаться эллипсы. Если $a = b = c$, то получаем $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ – сферу.

2. Гиперболоиды.

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{65}$$

Эта поверхность имеет три плоскости симметрии, так как переменные в уравнении x, y, z в чётных степенях (рис. 57). Чтобы построить эту поверхность, надо её пересечь плоскостями параллельными координатным плоскостям.

В (65) полагаем y= 0.

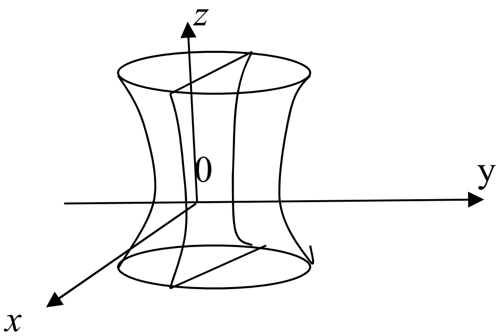


Рис. 57. Однополостный гиперболоид

В плоскости Oxz получаем гиперболу

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

В плоскости Оzy тоже гипербола

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

В плоскости Оxy – эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (66)$$

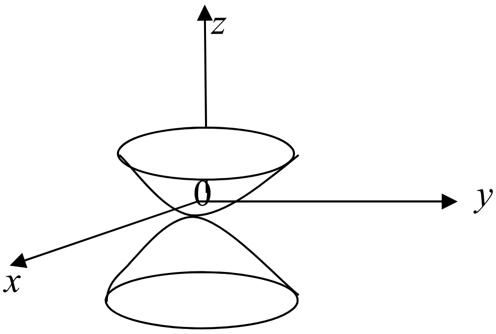


Рис. 58. Двуполостный гиперболоид

3. Параболоиды.

Каноническое уравнение эллиптического параболоида симметричного относительно оси *Oz* имеет вид:

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}. \qquad (67)$$

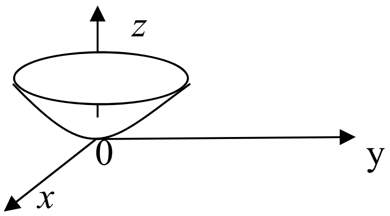


Рис. 59. Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение гиперболического параболоида (седло) имеет вид:

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, p > 0, q > 0 \qquad (67)$$

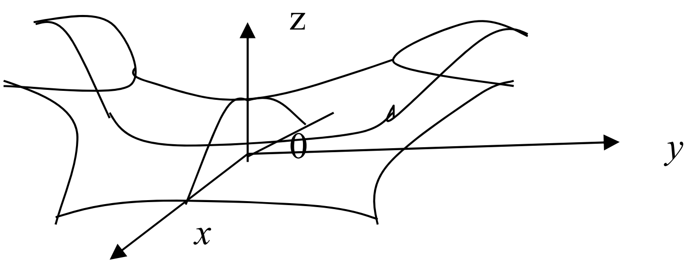


Рис. 60. Гиперболический параболоид

Задачи для самостоятельной работы

Узнать поверхность по каноническому уравнению и изобразить её.

1) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$.

2). $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$.

3) $2y^2 + z^2 = 2x$.

4). $y^2 - 6z = 0$.

5). $2x^2 + 4z^2 = 4$.

6). $y^2 - x^2 + 3z = 1$.

4. Поверхности вращения.

Определение 96. Поверхность, образованная вращением линии вокруг соответствующей оси, называется поверхностью вращения.

Пусть линия *L*, лежащая в плоскости *Oxz*, задана уравнением:

$$\begin{cases} X = 0 \\ F(Y, Z) = 0. \end{cases} \tag{68}$$

Получим уравнение поверхности, образованной вращением этой линии относительно оси *Oz*.

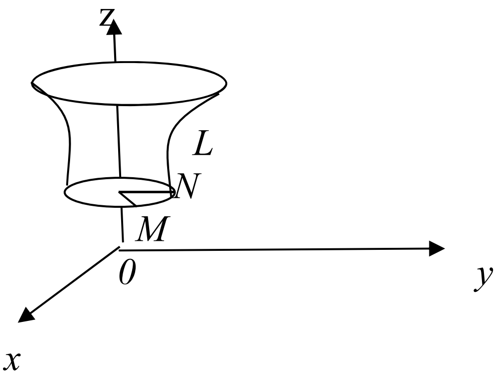


Рис. 61. Поверхность вращения

Пусть даны точки *N*(*0, Y, Z*); *M*(*x, y, z*) – точки поверхности, и пусть точка *K* – точка пересечения плоскости перпендикулярной оси вращения. *N* – точка пересечения плоскости перпендикулярной оси *Oz*, *KN* и *KM* – радиусы окружности, *KN*=*KM*.

Длина *KN* = $|Y|$, *KM*=*OP*=$\sqrt{x^2 + y^2}$ и $Z_N = z_M$, так как точка *N* лежит на линии *L* (68), то координаты точки *N*(*O,Y,Z*) удовлетворяют второму уравнению из (68), подставим в него $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, z)=0, получим уравнение поверхности вращения вокруг оси *Oz*.

Аналогично, вокруг оси *Ox* $F(\pm\sqrt{y^2+z^2}$, x)=0, вокруг оси *Oy* – $F(\pm\sqrt{x^2+z^2}$, y)=0.

Пример 48. Записать уравнение поверхности вращения линии $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$ вокруг оси *Oz*.

Решение. В данном уравнении заменим X^2 на $\sqrt{x^2+y^2}$ получим

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

– это эллипсоид вращения.

Пример 49. Записать уравнение поверхности, полученной от вращения линии

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси *Ox*.

Решение. В данном уравнении Z^2 заменим на $\sqrt{z^2+y^2}$, получим

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$$

– это двуполостный гиперболоид.

1.27. Преобразование прямоугольной системы координат в R^2. Квадратичные формы

1. Параллельный перенос осей координат.

Определение 97. Формулы, выражающие координаты точки в одной системе через её координаты в другой системе называются формулами преобразования координат.

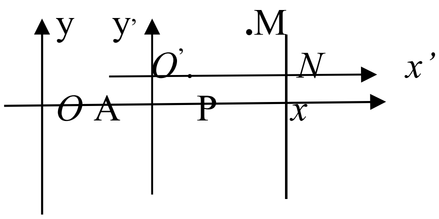


Рис. 62. Параллельный перенос осей координат

Пусть даны *Oxy* – старая система координат, *O'x'y'* – новая. Точки O'(x_0, y_0); *M*(*x*,*y*); *M*(x',y'). Выведем формулы, выражающие старые координаты точки через новые. Из рисунка 62 видно, что *O'N* = *AP*, но *O'N* =$|x'|$, *AP*=$|x-x_0|$.

Так что, $|x'|$=$|x-x_0|$ и обе эти величины имеют одинаковые знаки, то есть $x'=x-x_0$, отсюда $x=x'+x_0$, аналогично $y=y'+y_0$, получаем формулы параллельного переноса осей координат (69).

$$\begin{matrix} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{matrix}. \qquad (69)$$

Пример 50. Пусть дана точка *M*(2,-1) в системе *Oxy*. Найти её новые координаты *x*' и *y*' при параллельном переносе осей, если новое начало в старой системе координат имеет координаты *O*'(-1, 3).

Решение. 2=*x*'-1 → *x*'=3; -1=*y*'+3→ *y*'= -4.

Ответ: *M*(3,-4).

2. Поворот осей координат.

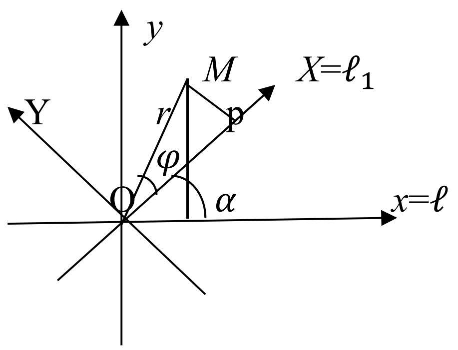


Рис. 63. Поворот осей координат

Oxy старая система координат. *OXY* – новая система координат. Найдём формулы , выражающие старые ко ординаты точки *M*(*x, y*) через новые координаты точки *M*(*X, Y*). Введём полярные координаты.

Для этого совместим полярную ось ℓ с осью *Ox*, тогда точка в новой системе будет иметькоординаты *M*(φ,*r*),а в старой $M(\alpha+\varphi, r)$. Запишем формулы, связывающие декартовы и полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\varphi) \\ y = r\sin(\alpha+\varphi), \end{cases}$$

– косинус и синус суммы двух углов распишем по известным формулам, получим:

$$\begin{cases} x = r(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) = (r\cos\varphi)\cos\alpha - (r\sin\varphi)\sin\alpha \\ y = r(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = (r\cos\varphi)\sin\alpha + (r\sin\varphi)\cos\alpha. \end{cases}$$

Получим формулы поворота осей координат (рис. 63):

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases} \tag{70}$$

В матричной форме эти формулы примут вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{71}$$

– матричная запись формул поворота**.**

Можно ещё короче записать эти формулы:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j = x'_i, \qquad i = 1, 2 \tag{72}$$

– тензорная форма.

Пример 51. Выразить старые координаты *x* и *y* точки через её новые координаты *X* и *Y* при повороте осей на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение.Так как

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то по формулам поворота (70) имеем $x = X\frac{\sqrt{2}}{2} - Y\frac{\sqrt{2}}{2} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$; $y = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$.

Ответ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\,X - Y) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\,X + Y). \end{cases}$$

3. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка.

Пример 52. С помощью параллельного переноса осей получить простейшее уравнение кривой и построить её: $x^2 - 2y^2 + 2x + 12y - 33 = 0$.

Решение. В уравнениии кривой выделим полные квадраты $(x^2 + 2x + 1)$ 1 - 2$(y^2 - 6y + 9 - 9) - 33 = 0$; $(x+1)^2 - 2(\,y - 3)^2 - 16 = 0$, получим

$$\frac{(x+1)}{16} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1.$$

Положим $O_1(-1{,}3)$; x = X - 1; y = Y+3 → X= x + 1; Y = y – 3; получаем каноническое уравнение гиперболы в новых координатах:

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{8} = 1.$$

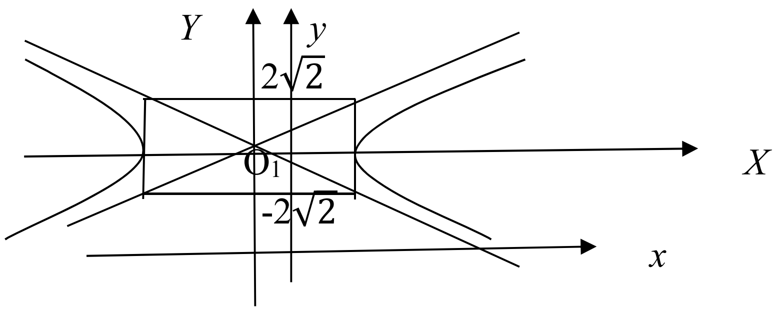


Рис. 64. Простейшее уравнение кривой к примеру 52

Пример 53. Поворотом осей координат на 45^0 упростить уравнение кривой и построить эту кривую $5x^2$ 6xy + $5y^2$= 32.

Решение. Запишем формулы поворота осей (70) на 45^0.

x =· $x' \cos 45^0 - y' \cdot \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$;

y $=x'\sin 45^0 + y'\cdot\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, подставим эти значения x и y в уравнение кривой $5\,\frac{2}{4}(x'-y')^2 - 6\,\frac{2}{4}(x'-y')(x'+y') + 5\,\frac{2}{4}(x'+y')^2$=32, произведя сокращения коэффициентов и раскрывая скобки, получим $x'^2 + 4y'^2 = 16$ или, разделив обе части равенства на 16,

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

– эллипс.

Квадратичные формы.

Определение 97. Квадратичной формой $Q(x)$ в n-мерном пространстве называется скалярное произведение следующего вида: $Q(\ x_1, x_2, \ldots . x_n) = (\overline{x}\,, A\overline{x})$, если $\overline{x}$ =($x_1, x_2, \ldots . x_n)$,если же $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

то $(\ \overline{x}, A\overline{x}) = \begin{pmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ то есть $Q(x_1, x_2, \ldots . x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$,где $a_{ij} = a_{ji}$.

Определение 98. Квадратичная матрица называется симметричной, если она не меняется при транспонировании, то есть $A^T = A$.

Пусть n=3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, если n=2, то $Q(\ x_{1,}x_2) = a_{1j}x_1x_j +$ $+a_{2j}x_2x_j == a_{11}x_1x_1 + a_{21}x_2x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2x_2 = a_{11}{x_1}^2\ + 2a_{12}x_1x_2 +$ $+a_{22}{x_2}^2$.

Определение 99. Канонической квадратичной формой называется квадратичная форма, содержащая только квадраты переменных.

Если n = 2, то $Q(x'_1, x'_2) = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2$, где λ_1 и λ_2 собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

С помощью квадратичных форм можно кривые второго порядка приводить к каноническому виду, а также определять тип кривой.

Определение 100. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола задаются квадратичными формами в двумерном пространстве, причём, если:

1) $\lambda_1\lambda_2 > \ 0$, то эллипс;
2) $\lambda_1\lambda_2\ < 0$, то – гипербола;
3) $\lambda_1\lambda_2$ = 0, то – парабола.

Пример 54. Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением: $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Решение. Составим симметрическую матрицу из коэффициентов при переменных $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, характеристическое уравнение на собственные числа имеет вид $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1\text{-}\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0$.

Ответ. Кривая является эллипсом.

Пример 55. Определить тип кривой второго порядка: $xy = 1$.

Решение. Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Произведение $\lambda_1\lambda_2 = -0{,}25 < 0$.

Ответ. Кривая является гиперболой.

Приложения линейной алгебры в экономике

1.28. Статическая модель межотраслевой экономики

В основе всякого рационального функционирования хозяйства лежит идея сбалансированности, суть которой состоит в том, что все затраты должны компенсироваться доходами. При построении балансовых моделей за основу берется балансовый метод – взаимное сопоставление имеющихся ресурсов и потребностей в них.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение валового национального продукта по отраслям, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n «чистых» отраслей, т. е. производит только один продукт, совместное производство различных продуктов исключается. Различные отрасли выпускают разные продукты. Такими отраслями могут служить энергетика, машиностроение, станкостроение, приборостроение, сельское хозяйство и т.д.

Каждая отрасль выпускает некоторый продукт, часть которого потребляется другими отраслями (производственное потребление), а другая часть идет на конечное потребление и накопление (непроизводственное потребление).

Независимо от масштаба производства удельный выпуск и соотношение затрат предполагаются постоянными.

Валовый выпуск i-й отрасли, $i = 1,2,...,n$ обозначим через X_i; через x_{ij} – стоимость продукта, произведенного в i-й отрасли и потребленного в j-й отрасли для изготовления продукции стоимостью X_j; y_i– конечный продукт i-й отрасли, z_j – условно-чистая продукция j-й отрасли, $j = 1,2,...,n$. В самой модели величины y_i мыслятся как экзогенно заданные.

Величины X_i и y_i могут быть представлены в натуральных и стоимостных единицах измерения, в соответствии с этим различают натуральный и стоимостной межотраслевые балансы.

Рассмотрим основные соотношения межотраслевого баланса. Валовая продукция i-й производящей отрасли (X_i) равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad (73)$$

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,n. \qquad (74)$$

Числа a_{ij} характеризуют технологию j-й отрасли. С учетом формулы (74) систему уравнений баланса можно переписать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + y_i, \; i = 1,2,...,n. \tag{75}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых затрат $A = (a_{ij})$, вектор-столбец валовой продукции $X = (X_i)$ и вектор столбец конечной продукции $Y = (y_i)$, то *экономико-математическая модель межотраслевого баланса* примет вид

$$X = AX + Y. \tag{76}$$

Модель межотраслевого баланса часто называют моделью В. Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Заметим, что вывод уравнения (76) основан на двух важных допущениях. Первое допущение состоит в неизменности сложившейся технологии производства, когда элементы матрицы $A = (a_{ij})$ постоянны. Второе допущение состоит в предположении линейности существующих технологий, т.е. для выпуска j-й отраслью продукции объема x требуется ресурсов (продукции i-й отрасли) в количестве $a_{ij}x$ единиц.

Важным вопросом в рассматриваемой модели является вопрос о существовании решения матричного уравнения (76). В развернутой форме это система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которая является хорошо изученным объектом линейной алгебры. Однако система описывает отраслевую структуру экономики и, с учетом экономической интерпретации вектор производства $X = (X_i)$, элементы матрицы прямых затрат a_{ij}, объемы конечного спроса y_i должны быть неотрицательным. Поэтому говорят, что модель Леонтьева продуктивна или работоспособна, если уравнение (76) имеет неотрицательное решение для любого $Y \geq 0$, т.е. матрица коэффициентов прямых затрат A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления.

Теорема. Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, когда существует неотрицательная матрица$(E - A)^{-1}$, обратная к матрице $(E - A)$, где E– единичная матрица.

Доказывается также, что модель Леонтьева продуктивна, если она позволяет произвести хоть какой-нибудь строго положительный вектор потребления; из чего также следует, что можно произвести и любой неотрицательный вектор потребления.

Одним из признаков продуктивности матрицы A является следующий: если сумма элементов столбцов (строк) матрицы A не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов (одной из строк) сумма элементов строго меньше единицы, то матрица A продуктивна.

Из (76) следует, что $(E - A)X = Y$, откуда

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{77}$$

Обозначим обратную матрицу как $B = (E - A)^{-1} = (b_{ij})$. Тогда $X = BY$. Это значит, что для любой i-й отрасли справедливо соотношение:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \,, \; i = 1,2,...,n \,. \tag{78}$$

Коэффициент полных затрат b_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли нужно произвести, чтобы с учетом прямых и косвенных затрат этой продукции получить единицу конечной продукции j-й отрасли. Полные затраты отражают использование ресурса на всех этапах изготовления и равны сумме прямых и косвенных затрат на всех предыдущих стадиях производства продукции.

Таким образом, суть построения модели Леонтьева состоит в следующем:

1. Определить объем конечной продукции каждой отрасли, зная величины валовой продукции каждой отрасли по формуле

$Y = (E - A)X$.

2. Определить объем валового выпуска отраслей по заданному экзогенно конечному спросу на основе данных о технологических возможностях, воплощенных в расходных коэффициентах a_{ij} по формуле

$X = (E - A)^{-1} Y$.

3. Определить величины конечной продукции ряда отраслей и объемы валовой продукции остальных отраслей, зная величины валовой продукции первых отраслей и объемы конечной продукции остальных отраслей.

Валовая продукция j-й потребляющей отрасли X_j равна сумме ее материальных затрат $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ и условно чистой продукции z_j:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j \,, \; j = 1,2,...,n \tag{79}$$

Тогда межотраслевой баланс можно представить таблицей 1.

Таблица 1

Межотраслевой баланс

Таблица	**Потребляющие отрасли**				**Конечный продукт**	**Валовый продукт**
	1	**2**	**...**	**n**		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	X_2
...	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	X_n
Условно-чистая продукция	z_1	z_2	…	z_n	$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{n} y_i$	
Валовый продукт	X_1	X_2	…	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i$

Таблица межотраслевого баланса состоит из четырех квадрантов. Первый квадрант (светло-бирюзовый) отражает межотраслевые потоки продукции. Второй (бледно-зеленый) характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода. Третий (светло-желтый) представляет национальный доход как стоимость условно-чистой продукции. Четвертый квадрант (серый) показывает конечное распределение и использование национального дохода.

Основной недостаток построенной статической модели межотраслевого баланса состоит в том, что модель не позволяет установить связи между планами производства отраслей и планами капитальных вложений, обеспечивающих развитие этих отраслей, т.е. модель не учитывает динамику самой экономики.

Пример 56. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для проверки продуктивности модели просуммируем элементы каждой строки матрицы A. Получим

0,3 + 0,1 + 0,4 = 0,8;

0,2 + 0,5 = 0,7;

0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,6.

Поскольку суммы элементов каждой строки меньше единицы, то модель межотраслевого баланса продуктивна.

Определим коэффициенты полных материальных затрат.

Находим матрицу $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & 0,0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу $B = (E - A)^{-1}$, используя известные методы высшей математики. Получим

$$B = \begin{pmatrix} 2,04 & 0,61 & 1,02 \\ 0,82 & 2,24 & 0,41 \\ 0,87 & 0,51 & 1,68 \end{pmatrix}.$$

Определим величины валовой продукции трех отраслей, используя процедуру умножения матрицы на вектор:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 2,04 & 0,61 & 1,02 \\ 0,82 & 2,24 & 0,41 \\ 0,87 & 0,51 & 1,68 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775,5 \\ 510,2 \\ 729,6 \end{pmatrix}.$$

Для определения элементов матрицы межотраслевых потоков продукции воспользуемся формулой $x_{ij} = a_{ij} X_j$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$, вытекающей из (74). Тогда получим

$x_{11} = a_{11} X_1 = 0,3 \cdot 775,5 = 232,65$;

$x_{12} = a_{12}X_2 = 0{,}1 \cdot 510{,}2 = 51{,}02$;

$x_{13} = a_{13}X_3 = 0{,}4 \cdot 729{,}6 = 291{,}84$;

$x_{21} = a_{21}X_1 = 0{,}2 \cdot 775{,}5 = 155{,}10$;

$x_{22} = a_{22}X_2 = 0{,}5 \cdot 510{,}2 = 255{,}10$;

$x_{23} = a_{23}X_3 = 0 \cdot 729{,}6 = 0$;

$x_{31} = a_{31}X_1 = 0{,}3 \cdot 775{,}5 = 232{,}65$;

$x_{32} = a_{32}X_2 = 0{,}1 \cdot 510{,}2 = 51{,}02$;

$x_{33} = a_{33}X_3 = 0{,}2 \cdot 729{,}6 = 145{,}92$.

Из (78) следует, что условно-чистая продукция j-й потребляющей отрасли z_j равна разности валовой продукции за вычетом суммы ее материальных затрат, т.е. $z_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, $j = 1,2,...,n$.

Тогда находим компоненты вектора условно-чистой продукции Z:

$z_1 = X_1 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}) = 775{,}5 - (232{,}65 + 155{,}10 + 232{,}65) = 155{,}10$;

$z_2 = X_2 - (x_{12} + x_{22} + x_{32}) = 510{,}2 - (51{,}02 + 255{,}10 + 51{,}02) = 153{,}06$;

$z_3 = X_3 - (x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 729{,}6 - (291{,}84 + 0 + 145{,}92) = 291{,}84$.

1.29. Примеры решения некоторых экономических задач

Рассмотренные операции над матрицами позволяют упростить решение некоторых экономических задач.

Пример 57. Предприятие выпускает продукцию трех видов P_1, P_2 и P_3, и использует сырье трех типов S_1 и S_2.Нормы расхода сырья характеризуется матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, где каждый элемент a_{ij} показывает сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей- скрытой $C = (90 \quad 70 \quad 100)$, стоимость каждого типа сырья (ден.ед.) матрицей- столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимого для планового выпуска продукции и общую стоимость сырья.

Решение. I способ. Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 3 \cdot 90 + 4 \cdot 70 + 2 \cdot 100 = 750$ ед., второго $S_2 = 2 \cdot 90 + 3 \cdot 70 + 100 = 590$ ед.

Матрица затрат сырья имеет вид $S = CA = (90 \quad 70 \quad 100)\begin{pmatrix} 3\,2 \\ 4\,3 \\ 2\,1 \end{pmatrix} = (750 \quad 490)$.

Общая стоимость сырья $Q = S \cdot B = (750 \quad 490)\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} = 30000 + 14700 = (447000)$.

II способ. Находим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 250 \\ 110 \end{pmatrix}$.

Общая стоимость сырья $Q = C \cdot R = \begin{pmatrix} 90 & 70 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 \\ 250 \\ 110 \end{pmatrix} =$.

$$(16200 + 17500 + 11000) = (44700)$$

Пример 58. Предприятие выпускает 4 вида изделий с использованием 4-х видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы A

$$\begin{array}{cc} & \textit{вид сырья} \\ & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \textit{вид изделия} \end{array}$$

План выпуска изделий характеризуется матрицей

$q = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 35 & 40 \end{pmatrix}$.

Найти затраты сырья на каждый вид изделия.

Решение. Затраты сырья на каждый вид изделия находятся как произведение матриц q и A

$$qA = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 35 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = (60 \cdot 2 + 50 \cdot 1 + 35 \cdot 7 + 40 \cdot 4$$

$$60 \cdot 3 + 50 \cdot 2 + 35 \cdot 2 + 40 \cdot 5 \qquad 60 \cdot 4 + 50 \cdot 5 + 35 \cdot 3 + 40 \cdot 6$$

$$60 \cdot 5 + 50 \cdot 6 + 35 \cdot 2 + 40 \cdot 8) = (575 \quad 550 \quad 835 \quad 990).$$

Пример 58. Пусть затраты 4-х видов сырья на выпуск 4-х видов продукции характеризуется матрицей A, приведенной в предыдущем примере.

Себестоимости каждого вида сырья и его доставки заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -\textit{себестоимость} \\ -\textit{доставка} \end{matrix}.$$

План выпуска продукции дан в предыдущей задаче. Найти 1) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку, 2) общие затраты на сырье и его транспортировку.

Решение. 1) Общие затраты на сырье и транспортировку находятся как произведение матриц

$$A \cdot C^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \\ 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix}.$$

2) Общие затраты на сырье и его перевозку находим как произведение $q \cdot A \cdot C^T$

$$\begin{pmatrix} 60 & 50 & 35 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 86 & 29 \\ 89 & 31 \\ 71 & 29 \\ 140 & 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17695 & 6185 \end{pmatrix}.$$

Пример 59. Фирма выпускает три вида продукции, используя пять видов сырья. Заданы: вектор спроса $x = (x_1, x_2, x_3)$; матрица порядка 3×5 $A = (a_{ij})$ удельных затрат ресурсов (a_{ij} - расход j-го вида ресурса на единицу выпуска i-го вида продукции); вектор цен ресурсов $c = (c_1, ..., c_5)$.

Определить: а) расход каждого ресурса, необходимого для удовлетворения спроса; б) стоимость каждого ресурса (удельные стоимостные затраты, приходящиеся на единицу выпуска продукции каждого вида); в) суммарные затраты на ресурсы, необходимые для удовлетворения заданного спроса.

Пусть

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение: а) Вычислим вектор затрат ресурсов (в натуральном выражении), необходимый для удовлетворения спроса (индекс "Т" означает транспонирование матрицы и в матричных операциях все векторы считаются векторами-столбцами):

$$A^T \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 49 \\ 105 \\ 24 \\ 104 \end{pmatrix},$$

т.е. для удовлетворения спроса необходимы затраты ресурсов в количестве 30, 49, 105, 24, 104 единиц соответственно.

б) Вычислим вектор удельных стоимостных затрат:

$$A \cdot c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 89 \\ 99 \end{pmatrix},$$

таким образом, стоимостные затраты на единицу выпуска каждого вида продукции составляют 67, 89, 99 ден.ед. соответственно.

в) Суммарные стоимостные затраты (совпадают со скалярным произведением вектора удельных стоимостных затрат на вектор объемов спроса):

$$(Ac, x) = \begin{pmatrix} 67 & 89 & 99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = 67 \cdot 5 + 89 \cdot 8 + 99 \cdot 3 = 1344.$$

Контрольная работа

В задачах 1 – 20 даны вершины треугольника ABC. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и AC, их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр; 6) систему линейных неравенств, определяющих треугольник ABC.

1. A(-5;0), B(7;9), C(5;-5);
2. A(-7;2), B(5;11), C(3;-3);
3. A(-5;-3), B(7;6), C(5;-8);
4. A(-6;-2), B(6;7), C(4;-7);
5. A(-8;-4), B(4;5), C(2;-9).
6. A(0;-1), B(12;8), C(10;-6);
7. A(-6;1), B(6;10), C(4;-4);
8. A(-5;-4), B(10;5), C(8;-9);
9. A(-3;0), B(9;9), C(7;-6);
10. A(-9;-2), B(3;7), C(1;-7);
11. A(-5;2), B(7;7), C(5;7);
12. A(-7;5), B(5;-4), C(3;10);
13. A(-7;8), B(5;-8), C(3;6);
14. A(0;3), B(12;-6), C(10;8);
15. A(-8;4), B(4;-5), C(2;9);
16. A(-2;2), B(10;-7), C(8;7);
17. A(1;2), B(3;-7), C(11;7);
18. A(-4;1), B(8;8), C(6;6);
19. A(-7;-1), B(5;-10), C(3;4);
20. A(-3;3), B(9;-6), C(7;8).

В задачах 21-40 вычислить определитель

21. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

22. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

23. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

24. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

25. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

26. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

27. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$;

28. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

29. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

30. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

31. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

32. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

33. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

34. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

35. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

36. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

37. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

38. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

39. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

40. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

В задачах 41 – 60 найти значение выражения.

41 $A^2 - 2A^T \cdot A + 3$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

42 $A \cdot A^T + 3A^2 - 4$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

43 $2A \cdot A^T - A^2 + 4$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

44 $A \cdot A^T + A^2 - 3$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

45 $A \cdot A^T - A^2 + 2$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

46 $A^2 - A \cdot A^T + 2$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

47 $2A \cdot A^T - A^2 + 1$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

48 $A^2 - A \cdot A^T + 1$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

49 $A^2 - A \cdot A^T + 3$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

50 $A \cdot A^T - 3A^2 + 2$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

51 $2A \cdot A^T + A^2 - 1$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

52 $A \cdot A^T - 2A^2 + 3$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

53 $A \cdot A^T - 2A + 4$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

54 $A \cdot A^T - 2A^2 - 3$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

55 $A^2 - 2A \cdot A^T + 4$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

56 $A^2 + 2A \cdot A^T - 4$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

57 $3A^2 - A \cdot A^T + 4$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

58 $A\cdot A^T-3A^2+4$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

59 $A\cdot A^T-2A-3$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

60 $A\cdot A^T-2A^2+3$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Решить задачи 61 – 80. Фирма выпускает три вида продукции, используя пять видов сырья. Заданы: вектор спроса $x = (x_1, x_2, x_3)$; матрица порядка 3×5 $A=[a_{ij}]$ удельных затрат ресурсов (a_{ij}- расход j-го вида ресурса на единицу выпуска i – го вида продукции); вектор цен ресурсов $c=(c_1, c_2, \ldots, c_5)$. Определить: а) расход каждого ресурса, необходимого для удовлетворения спроса; б) стоимость каждого ресурса (удельные стоимостные затраты, приходящиеся на единицу выпуска продукции каждого вида); в) суммарные затраты на ресурсы, необходимые для удовлетворения заданного спроса.

61. x = (10;7;4), c = (7;4;5;10;2), $A=\begin{bmatrix}5 & 10 & 3 & 9 & 2\\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8\\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10\end{bmatrix}$;

62. x = (9;6;3), c = (6;3;4;9;1), $A=\begin{bmatrix}4 & 9 & 2 & 8 & 1\\ 3 & 7 & 4 & 5 & 7\\ 5 & 11 & 3 & 2 & 9\end{bmatrix}$;

63. x = (8;5;2), c = (5;2;4;9;5), $A=\begin{bmatrix}3 & 8 & 2 & 7 & 1\\ 2 & 6 & 4 & 4 & 2\\ 6 & 9 & 3 & 1 & 3\end{bmatrix}$;

64. x = (11;8;5), c = (8;5;6;11;3), $A=\begin{bmatrix}6 & 11 & 4 & 10 & 1\\ 5 & 9 & 6 & 7 & 3\\ 7 & 13 & 5 & 4 & 2\end{bmatrix}$;

65. x = (12;9;6), c = (9;6;7;12;3), $A=\begin{bmatrix}7 & 10 & 5 & 10 & 1\\ 6 & 9 & 5 & 7 & 3\\ 8 & 11 & 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$;

66. x = (10;8;3), c = (9;8;7;4;1), $A=\begin{bmatrix}5 & 11 & 3 & 5 & 2\\ 4 & 8 & 4 & 5 & 3\\ 6 & 7 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$;

67. x = (12;4;8), c = (8;7;4;3;9), $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 11 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 12 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix};$

68. x = (11;8;9), c = (8;5;4;3;1), $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 8 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 11 & 3 & 5 \end{bmatrix};$

69. x = (10;3;5), c = (10;8;11;12;3), $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix};$

70. x = (8;4;2), c = (8;7;4;3;9), $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix};$

71. x = (10;7;4), c = (7;4;5;10;2), $A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix};$

72. x = (9;6;3), c = (6;3;4;9;1), $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix};$

73. x = (8;4;3), c = (7;2;6;9;1), $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix};$

74. x = (6;8;1), c = (8;2;6;5;3), $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 6 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix};$

75. x = (12;0;6), c = (9;6;2;15;3), $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 6 & 10 & 1 \\ 6 & 12 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix};$

76. x = (15;8;6), c = (8;8;6;4;1), $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

77. x = (2;4;6), c = (8;8;4;6;9), $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 & 11 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 10 & 2 \end{bmatrix}$;

78. x = (9;8;4), c = (5;9;4;3;1), $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 8 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$;

79. x = (1;3;6), c = (5;8;1;2;3), $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$;

80. x = (5;4;1), c = (6;7;4;3;8), $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

В задачах 81-100 решить уравнения.

81. $x \cdot \begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

82. $x \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

83. $x \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

84. $x \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

85. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

86. $x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

87. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

88 $x \cdot \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

89. $\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

90. $x \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -16 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

91. $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

92. $x \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

93. $x \cdot \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

94. $x \cdot \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

95. $x \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

96. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

97. $x \cdot \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

98. $\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

99. $\begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

100. $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

В задачах 101 – 120 проверить, что линейная система уравнений с квадратной матрицей коэффициентов совместна и решить ее: а) по формуле Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом исключения Гаусса.

101. $\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$;

102. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - y - 3z = 1 \\ x + 5y + z = 3 \end{cases}$;

103. $\begin{cases} 2x + y + 4z = 20 \\ 2x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \end{cases}$;

104. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$;

105. $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$;

106. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 19 \\ 5x + 6y - 2z = 15 \end{cases}$;

107. $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ 2x - 5y - 3z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$;

108. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$;

109. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$;

110. $\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x-2y-z=3 \end{cases}$;

111. $\begin{cases} x+5y+z=7 \\ 2x-y-z=-2 \\ 3x-2y-4z=1 \end{cases}$;

112. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$;

113. $\begin{cases} x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$;

114. $\begin{cases} 2x-y-z=-6 \\ 3x+4y-2z=-10 \\ 3x-3y+4z=2 \end{cases}$;

115. $\begin{cases} 3x-y-z=2 \\ -2x+y+z=0 \\ x-y+4z=13 \end{cases}$;

116. $\begin{cases} 2x-y-3z=5 \\ 3x+4y-5z=6 \\ 2x-7z=-1 \end{cases}$;

117. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$;

118. $\begin{cases} 2x-y+z=7 \\ x+3y-2z=0 \\ 2y-z=2 \end{cases}$;

119. $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$;

120. $\begin{cases} 11x+3y-z=2 \\ 2x-5y-5z=-3 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

В заданиях 121 – 130 решить систему уравнений общего вида

121. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3-6x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+x_3-x_4=2 \\ x_1+7x_2-24x_3+45x_4=-6 \end{cases}$;

122. $\begin{cases} x_1+8x_2+6x_3-6x_4=1 \\ 2x_1+17x_2-x_3+4x_4=0 \\ 3x_1+26x_2-8x_3+14x_4=-1 \end{cases}$;

123. $\begin{cases} x_1+4x_2+4x_3-9x_4=1 \\ 2x_1+7x_2-2x_3+x_4=1 \\ 3x_1+11x_2+2x_3+10x_4=2 \end{cases}$;

124. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1 \\ 2x_1+5x_2-8x_3-5x_4=0 \\ 3x_1+10x_2+3x_3-5x_4=5 \end{cases}$;

125. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3+x_4=1 \\ 5x_1-8x_2-21x_3+x_4=0 \\ 2x_1-13x_2-7x_3+6x_4=7 \end{cases}$;

126. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0 \\ -4x_1-10x_2+3x_3-21x_4=-5 \end{cases}$;

127. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 21x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 54x_2 + 7x_3 + 22x_4 = -3 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$;

128. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$;

129. $\begin{cases} 2x_1 - 26x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 16x_4 = 5 \end{cases}$;

130. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 20x_4 = 1 \end{cases}$.

В задачах 131-150 даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Требуется записать: а) координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в системе орт $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и найти их длины; б) найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; в) найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$; г) найти площадь грани *ABC*; д) найти объем пирамиды *ABCD*; е) составить уравнение ребра *AC*; ж) составить уравнение грани *ABC*.

131. A(1, 2,1), B(-1, 1.0), C(1, -3, 6), D(1, 5,-6);
132. A(0, -2, -3), B(-1, -4, 2), C(-5, 1, 0), D(2, 3, -1);
133. A(-1, -2, -7), B(-1, 3, 9), C(4, -3, 3), D(0, 0, -2);
134. A(-3, -2, 1), B(0, -8, 0), C(1, -3, -4), D(2, 3, -6);
135. A(1, 1, 1), B(-1, -5, -8), C(1, -3, 6), D(2, -2, -2);
136. A(1, 2, 1), B(-1, 7, 0), C(1, -3, 8), D(1, 0, -6);
137. A(1, -8, 1), B(-1, 0, 0), C(-5, -3, 6), D(-3, 5, -1)
138. A(1, -2, -1), B(-1, 4, 1), C(1, 3, 4), D(1, 5, -6);
139. A(7, 2, 1), B(-1, 7, 6), C(1, -3, 0), D(1, 5, -4);
140. A(-7, 2, -4), B(-4, -1, 0), C(1, -3, 5), D(1, 2, -4);
141. A(-1, 7, -1), B(-1, 5, 0), C(0, -3, 4), D(-2, 2, -3);
142. A(-1, -6, -1), B(-7, 3, 0), C(1, -3, 6), D(1, 4, -3);
143. A(6, 2, 1), B(-1, 4, 0), C(1, -3, -8), D(1, 5, -6);
144. A(0, 2, 1), B(-1, -9, 0), C(2, -3, -4), D(3, -3, -1);
145. A(-4, -4, 1), B(-1, 5, -2), C(1, 3, -1), D(-2, 5, -3);
146. A(-1, -1, -1), B(2, 2, 2), C(-3, -3, -3), D(4, 4, 4);
147. A(-2, 0, -2), B(-1, 0, 1), C(1, -3, 6), D(1, -2, -4);
148. A(-5, 2, 4), B(-1, 1, 0), C(1, -3, 6), D(0, 5, -6);
149. A(3, -3, 1), B(-5, 6, 0), C(-1, -3, 4), D(-4, 5, -6);
150. A(7, -2, 1), B(-1, 1, -1), C(6, -3, 6), D(4, -1, -7).

Список иллюстраций

Рис. 1. Коллинеарные векторы 40
Рис. 2. Компланарные векторы 40
Рис. 3. Равные и неравные векторы 40
Рис. 4. Геометрическая сумма векторов 41
Рис. 5. Геометрическая сумма нескольких векторов 41
Рис. 6. Правило параллелограмма 41
Рис. 7. Проекция вектора на ось 42
Рис. 8. Аффинный базис 46
Рис. 9. Правая и левая тройка векторов 50
Рис. 10. Циклоида 55
Рис. 11. К составлению общего уравнения прямой 56
Рис. 12. К составлению канонического уравнения прямой 57
Рис. 13. К составлению уравнения прямой с угловым коэффициентом 58
Рис. 14. Угол между прямыми 58
Рис. 15. Угол между параллельными прямыми 58
Рис. 16. Угол между прямыми 59
Рис. 17. Расстояние от точки до прямой 60
Рис. 18. Расстояние от точки до прямой к решению примера 31 60
Рис. 19. К составлению векторного уравнения плоскости 61
Рис. 20. К составлению общего уравнения плоскости 62
Рис. 21. К составлению общего уравнения плоскости 62
Рис. 22. Плоскость, параллельная оси Ox 62
Рис. 23. Плоскость, проходящая через ось Ox 62
Рис. 24. Плоскость, параллельная оси Oy 63
Рис. 25. Плоскость, проходящая через ось Oy 63
Рис. 26. Плоскость, параллельная оси Oz 63
Рис. 27. Плоскость, проходящая через ось Oz 63
Рис. 28. Плоскость, параллельная координатной плоскости XOY 63
Рис. 29. Плоскость параллельная координатной плоскости XOZ 64
Рис. 30. Плоскость, параллельная координатной плоскости YOZ 64
Рис. 31. Координатная плоскость XOY 64
Рис. 32. Координатная плоскость YOZ 64
Рис. 33. Координатная плоскость XOZ 64
Рис. 34. К составлению уравнения плоскости в отрезках в примере 34 65
Рис. 35. К составлению уравнения угла между плоскостями 65

Рис. 36. К составлению уравнения плоскости, перпендикулярной двум плоскостям в примере 36 66
Рис. 37. К составлению уравнения плоскости, проходящей через 3 различные точки, не лежащие на одной прямой 66
Рис. 38. К составлению уравнения плоскости в нормальном виде 67
Рис. 39. Расстояние от точки до плоскости 67
Рис. 40. К составлению уравнения прямой, проходящей через две точки 69
Рис. 41. К составлению уравнения прямой, проходящей через заданную точку, перпендикулярно прямым 71
Рис. 42. Взаимное расположение прямой и плоскости 72
Рис. 43. К условию принадлежности прямой плоскости 72
Рис. 44. Связь полярной и декартовой систем координат 74
Рис. 45. К определению эллипса 75
Рис. 46. Эллипс 75
Рис. 47. К решению примера 46 76
Рис. 48. К определению гиперболы 76
Рис. 49. Гипербола 77
Рис. 50. К определению параболы 77
Рис. 51. Парабола 77
Рис. 52.К определению цилиндрической поверхности 78
Рис. 53. Эллиптический цилиндр 79
Рис. 54. Гиперболический цилиндр Рис. 55. Параболический цилиндр 79
Рис. 56. Коническая поверхность 80
Рис. 57. Однополостный гиперболоид 81
Рис. 58. Двуполостный гиперболоид 82
Рис. 59. Эллиптический параболоид 82
Рис. 60. Гиперболический параболоид 83
Рис. 61. Поверхность вращения 83
Рис. 62. Параллельный перенос осей координат 84
Рис. 63. Поворот осей координат 85
Рис. 64. Простейшее уравнение кривой к примеру 52 86

Список использованной литературы

1. Сидоренко Г. В. Линейная алгебра и линейные экономические модели. учеб. пособие / Г. В. Сидоренко. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009. — 180 с.

2. Малугин В. А. Математика для экономистов: линейная алгебра. Задачи и упражнения. допущено УМО по классическому унив. образованию. учеб. пособие для вузов / В. А. Малугин. — М. : ЭКСМО, 2006. — 173 с.

3. Кострикин А. И. Введение в алгебру : учебник / А. И. Кострикин. — М. : МЦНМО, 2009. — Ч. 2. Линейная алгебра. — 368 с. – ISBN 978-5-94057-454-5; То же [Электронный ресурс]. — Режим доступа: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144 (24.03.2017).

4. Миронов В. Л. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебное пособие / В. Л. Миронов. — М. : Издательский дом «Дело», 2008. — 192 с.: ил. – ISBN 978-5-7749-0521-8; То же [Электронный ресурс]. — Режим доступа: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=442862 (24.03.2017).

5. Кремер Н. Ш., Фридман М. Н. Линейная алгебра. рек. М-вом образования РФ. учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман. — М. : Юрайт, 2014. — 307 с.

6. Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. учеб. пособие/ Г. С. Шевцов. — М. : Финансы и статистика, 2003. — 575 с.

7. Балдин К. В. Математика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / К. В. Балдин. — М. : Юнити-Дана, 2012. — 543 с. — Режим доступа: http://www.biblioclub.ru/book/114423.

8. Воеводин В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин; под ред. Т.И. Кузнецовой. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука, 1980. — 400 с. : ил.; То же [Электронный ресурс]. – Режим доступа: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450129 (23.01.2017).

Учебное издание

Белых Татьяна Ивановна, **Бурдуковская** Анна Валерьевна

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

ЧАСТЬ IX

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 28.05.18

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
htpp://bgu.ru.