О.В. Леонова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

О.В. Леонова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Иркутск
Издательство БГУ
2020

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7
Л59

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Аксенюшкина
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. Мамонова

Леонова О.В.
Л59 Математика : учеб. пособие / О.В. Леонова. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2020. – 106 с. – Режим доступа: http://lib-catalog.bgu.ru.

В учебном пособии содержится теоретический материал, примеры решения задач, задачи для решения на семинаре и самостоятельно. Излагаемый материал охватывает все разделы рабочей программы дисциплины «Математика» для студентов направления 38.05.01 «Экономическая безопасность».

Для студентов очной и заочной форм обучения.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава 1. Векторная алгебра

1.1. Понятие n-мерного вектора, действия с векторами

Вектором размерности n или n*-мерным вектором* называется любой упорядоченный набор из n чисел. Эти числа называются координатами или компонентами вектора: вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

***Пример* 1.1.** $x=(2;5)$[1], $y=(-3;10)$ – это двумерные вектора, координаты которых соответственно равны $x_1=2$, $x_2=5$, $y_1=-3$, $y_2=-10$.

$z=(3;7;-11)$ – трехмерный вектор, координаты которого равны $z_1=3$, $z_2=7$, $z_3=-11$.

Совокупность всех векторов размерности n называется n-мерным векторным пространством R^n.

***Пример* 1.2.** $x\in R^2$, $y\in R^2$, $z\in R^3$ (по данным примера 1.1).

Координаты вектора можно расположить либо в строку

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{1.1}$$

либо в столбец

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Тогда (1.1) – это вектор-строка, (1,2) – это вектор-столбец.

Два n-мерных вектора x и y называются *равными*, если их соответствующие координаты равны: $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, …, $x_n=y_n$.

Вектор, все координаты которого равны нулю, называется *нулевым* вектором $0=(0;0;...;0)$.

Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ – произвольные n-мерные векторы.

Суммой векторов x и y называется вектор z, координаты которого получены суммированием соответствующих координат векторов x и y:

$$z=x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,....,x_n+y_n).$$

***Пример* 1.3.** Даны векторы $x=(0;3;-2)$ и $y=(-1;5;8)$. Найдем вектор $z=x+y$: $z=x+y=(0+(-1);3+5;-2+8)=(-1;8;6)$.

---

[1] При работе с конкретными числовыми векторами координаты будем отделять точкой с запятой.

Разностью векторов x и y называется вектор $z = x - y$, координаты которого получены вычитанием соответствующих координат векторов x и y:

$$z = x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n).$$

***Пример* 1.4.** Даны векторы $x = (0;3;-2)$ и $y = (-1;5;8)$. Найдем вектор $z = x - y$: $z = x - y = (0-(-1);3+5;-2-8) = (1;-2;-10)$.

Произведением вектора x *на число* α называется вектор αx, координаты которого получены умножением координат вектора x на число α:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

***Пример* 1.5.** Дан вектор $x = (0;3;-2)$, $\alpha = 5$. Найдем вектор $5x$:
$5x = (5 \cdot 0; 5 \cdot 3; 5 \cdot (-2)) = (0;15;-10)$.

Свойства арифметических операций над векторами:

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
4) $(\alpha_1 + \alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x$;
5) $\alpha_1(\alpha_2 x) = (\alpha_1 \alpha_2)x$;
6) для любого вектора x существует вектор $-x$:
$-x = -1 \cdot x$, $x + (-x) = x - x = 0$, где $0 = (0;0;...;0)$ – нулевой вектор.

Два вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *коллинеарные* только в том случае, если их координаты пропорциональны, т.е. $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Скалярным произведением векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ одинаковой размерности называется число, которое обозначается $\langle x, y \rangle$ и определяется равенством:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i. \tag{1.3}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов (1.3) – это сумма произведений соответствующих координат векторов.

***Пример* 1.6.** Даны векторы $x = (2;-1;10)$ и $y = (6;7;1)$. Найдем скалярное произведение этих векторов по формуле (1.3):

$$\langle x, y \rangle = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 + 10 \cdot 1 = 12 - 7 + 10 = 15.$$

Из формулы (1.3) вытекают свойства скалярного произведения:

1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
2) $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
3) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

4) $\langle x,x\rangle > 0$, если $x \neq 0$, $\langle x,x\rangle = 0$, если $x = 0$.

Длиной или *нормой вектора* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\ .$$

Пример **1.7.** Дан вектор $x = (1;-2;0;5;3;-5)$, найдем его длину:

$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+4+0+25+9+25} =$

$= \sqrt{64} = 8.$

Расстояние между векторами (точками) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ равно длине вектора $x - y$ или $y - x$:

$$\|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} \qquad (1.4)$$

Пример **1.8.** Найдем расстояние между векторами $x = (2;\ 0;\ -1;\ 5;\ -3;\ 1)$, $y = (4;-2;7;2;3;-1)$.

Используем формулу (1.4):

$\|x-y\| = \sqrt{(2-4)^2 + (0-(-2))^2 + (-1-7)^2. + (5-2)^2 + (-3-3)^2 + (1+1)^2} =$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2 + 3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+64+9+36+4} = \sqrt{121} = 11.$

Из школьного курса геометрии известно, что скалярное произведение двух векторов определяется по формуле:

$$\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi, \qquad (1.5)$$

где φ – это угол между векторами x и y:

Из формулы (1.5) найдем косинус угла φ между векторами x и y:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Пример **1.9.** Найти угол между векторами $x = (1;4;-2;2)$ и $y = (3;1;1;5)$.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов, длины векторов:

$$\langle x,y\rangle = 1\cdot 3 + 4\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot 5 = 3 + 4 - 2 + 10 = 15,$$

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+16+4+4} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\|y\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{9+1+1+25} = \sqrt{36} = 6,$$

отсюда по формуле (1.5):

$$\cos\varphi = \frac{15}{5\cdot 6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \text{ угол } \varphi = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Векторы x и y называются *ортогональными* (перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\langle x, y\rangle = 0$.

***Пример* 1.10.** Найти угол между векторами $x = (1;\ 3;\ 4)$ и $y = (-4;\ 0;\ 1)$.

Решение: Найдем скалярное произведение векторов, длины векторов:

$$\langle x, y\rangle = 1\cdot(-4) + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 = -4 + 0 + 4 = 0,$$

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26},$$

$$\|y\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{16+0+1} = \sqrt{17},$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}} = 0,\ \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

1.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Линейной комбинацией векторов $x, y \in R^n$ называется вектор вида

$$\alpha x + \beta y,$$

где α и β – произвольные, отличные от нуля числа, коэффициенты данной линейной комбинации.

В общем случае: линейной комбинацией векторов $x^1, x^2, ..., x^k \in R^n$ называется любой вектор вида

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_k x^k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ –числа, коэффициенты данной линейной комбинации.

Векторы $x^1, x^2, ..., x^k \in R^n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, среди которых имеются ненулевые, такие что выполняется равенство:

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_k x^k = 0. \qquad (1.6)$$

Если же равенство (1.6) выполняется только для всех $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, равных нулю, то векторы $x^1, x^2, ..., x^k \in R^n$ – *линейно независимы*.

***Пример* 1.11.** Установить, являются ли векторы $x^1 = (2;4), x^2 = (4;8)$ линейно зависимыми.

Решение: Составим линейную комбинацию по формуле (1.6): $\lambda_1(2;4) + \lambda_2(4;8) = 0$.

Это равенство приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0, \\ 4\lambda_1 + 8\lambda_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2,$$

т.е. найдутся числа λ_1 и λ_2, например, $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1,$ при которых линейная комбинация нулевая, значит векторы $x^1 = (2;4), x^2 = (4;8)$ линейно зависимы.

Векторы $x^1 = (2;4), x^2 = (3;5)$ линейно независимы, так как

$$\lambda_1(2;4) + \lambda_2(3;5) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$ т.е. $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 = 0$ выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

Пусть $Q -$ произвольное множество $n -$ мерных векторов, т.е. $Q \subset R^n.$ Система $n -$ мерных векторов $B = (x^1; x^2; \ldots; x^s)$ называется базисом в $Q,$ если выполняются следующие условия:

1) система векторов $B = (x^1; x^2; \ldots; x^s)$ линейно независима;

2) для любого $n -$ мерного вектора $x \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s,$ такие, что

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_s x^s = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k x^k. \tag{1.7}$$

Формула (1.7) называется *разложением вектора* x *по базису* $B.$ Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ однозначно определяются вектором x и называются координатами этого вектора в базисе $B.$

***Пример* 1.12.** Пусть $x^1 = (3;-2), x^2 = (4;1) -$ некоторый базис в $R^2,$ разложить вектор $x = (-2;5)$ по данному базису.

Решение: По формуле (1.7)

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \Rightarrow (-2;5) = \lambda_1(3;-2) + \lambda_2(4;1) \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = -2, \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1.$ Таким образом, $x = -2x^1 + x^2.$

Справедливы следующие утверждения:

1. Всякая система векторов $Q \subset R^n$ имеет по крайней мере один базис, все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого рангом системы Q и обозначаемого $r(Q).$

2. Ранг всего пространства R^n равен n и называется размерностью этого пространства; в качестве базиса R^n можно взять следующую систему векторов: $e^1 = (1;0;\ldots;0),\ e^2 = (0;1;\ldots;0), \ldots\ldots, e^n = (0;0;\ldots;1).$ Этот базис в R^n называется *стандартным* или *каноническим*.

Задачи

1.1. Заданы векторы: $x^1=(4;1;3;-2),\ x^2=(1;2;-3;2),\ x^3=(16;9;1;-3),$ $x^4=(0;1;2;3), x^5=(1;-1;15;0)$. Найти следующие линейные комбинации: $а) 3x^1+5x^2-x^3$; $б)\ x^1+2x^2-x^4-2x^5$; $в)\ 2x^1+4x^3-2x^5$;
$г)\ 0{,}5x^1+3x^3-0{,}5x^4+x^5$.

1.2. Заданы векторы: $x^1=(4;1;3;-2),\ x^2=(1;2;-3;2),\ x^3=(16;9;1;-3),$ $x^4=(0;1;2;3), x^5=(1;-1;15;0)$. Найти вектор a из уравнения:
$а)\ 2a+x^1-2x^2-x^5=0$; $б) x^1-3x^5+a+x^3=0$;
$в) 2(x^1-a)+5(x^4+a)=0$; $г) 3(x^3+2a)-2(x^5-a)=0$.

1.3. Определить линейную зависимость или независимость векторов:
$а) x^1=(-3;1;5)$ *и* $x^2=(6;-3;15)$; $б) x^1=(1;2;3;0)$ *и* $x^2=(2;4;6;0)$;
$в) x^1=(2;-3;1), x^2=(3;-1;5)$ *и* $x^3=(1;-4;3)$.

1.4. Найти значения параметра a, для которых векторы
$x^1=(1;1;1),\ x^2=(5;5;a),\ x^3=(3;-2;1;)$ линейно зависимы.

1.5. Найти длины векторов $x^1=(1;-1;-1;-1),\ x^2=(-1;1;1;-1)$ и угол между ними в пространстве R^4.

1.6. Найти (p,q), если $p=2a+b,\quad q=b-a,\ \|a\|=2, \|b\|=3$ и угол между векторами a и b равен $\frac{\pi}{6}$.

1.7. Какой угол образуют векторы p и q, если $\|p\|=1, \|q\|=1$ и векторы $x=p+2q$ и $y=5p-4q$ перпендикулярны?

1.8. Сумма в 1 млн р. разделена на 4 части: 100, 300, 400 и 200 тыс. р. Эти суммы помещены в четыре банка под годовую процентную ставку 6, 9, 10 и 11 % соответственно. Составить вектор вкладов и процентных ставок. Сколько денег получит вкладчик через год?

1.9. Вычислить $(a-b,a-b)^2$, если $\|a\|=2\sqrt{2}, \|b\|=4$, угол между векторами a и b равен 135°.

1.10. При каких значениях a и b векторы $x=(a;-2;5)$ и $y=(1;b;-3)$ коллинеарные?

Задачи для самостоятельного решения

1.11. Даны векторы $u=(1;2),\ v=(0;1),\ w=(1;-3),\ x=(1;2;0),\ y=(0;1;1)$.
Вычислить те из следующих векторов, которые имеют смысл:
$u+v-4w$; $u+y$; $3y$; $2v$; $u+2v$; $u-v$; $3x+y$; $-2x$; $w+2x$.

1.12. Пусть $a=b=(-3;2;x)$. Найти x, если $\langle a,b\rangle=17$.

1.13. Пусть $x=(\sin\alpha;\ \cos\alpha)$. Вычислить $\langle x,x\rangle$.

1.14. Найти все значения переменной x такой, что $\langle u,u\rangle=50$, где $u=(x;3;4)$.

1.15. Найти вектор x из уравнения $2a+b+4x-c=0$, где $a=(3;\ -1;\ 0;\ 0)$; $b=(6;\ -12;\ 8;\ 5)$; $c=(4;\ -1;\ 3;\ -1)$.

1.16. Найти вектор x из уравнения $3(a-x)+2(b+x)=5(c+x)$, где $a=(2;\ 5;\ 1;\ 3)$; $b=(10;\ 1;\ 5;\ 10)$; $c=(4;\ 1;\ -1;\ 1)$.

1.17. Найти, при каких значениях x скалярное произведение векторов $a=(2;3;0;5)$ и $b=(0;-1;2;x)$ равно нулю.

1.18. Даны векторы: $a=(-3;2;-1;4;5)$ и $b=(1;-2;5;6;8)$. Найти: *a*) расстояние между ними, *b*) скалярное произведение этих векторов.

1.19. Даны векторы: $a=(4;-2;-4;8)$; $b=(5;-1;3;-1)$. Вычислить: *a*) $\langle a,b\rangle$; *b*) $\sqrt{\langle a,a\rangle}$; *c*) $\langle a,a-b\rangle$; *d*) $\langle 2a-b,a+3b\rangle$.

1.20. Даны векторы: $a=(1;1;-1;0)$, $b=(2;-1;2;1)$, $c=(-1;1;0;1)$. Найти длины векторов: *a*) a; *b*) $3b$; *c*) $a+b$; *d*) $-a+b+2c$.

1.21. Даны векторы: $a=(0;5;-2;3;-4;1;-3)$ и $b=(-1;2;5;-4;-2;1;-1)$. Найти косинус угла между ними.

1.22. При каком значении λ векторы $a=(2\lambda;\ \lambda^2-1;\ 3)$ и $b=(2;0;3\lambda)$ равны между собой?

1.23. При каком значении x векторы $a=(6;-4;8)$ и $b=(x;2;-4)$ будут:
a) коллинеарные, *b*) ортогональны?

1.24. Даны векторы $x=(2;-3;5;1;6)$ и $y=(2;2;-6;0;-2)$. Найти $\|x\|-\|y\|$, $3\|x\|-\|y\|$.

1.25. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели, которых приведены в таблице. Следует рассчитать следующие ежесуточные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

Вид изделия	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	10	2	9	35
2	40	3	4	20
3	30	7	14	44
4	20	6	7	25

1.26. На Омском экспериментальном заводе (ОЭЗ) сельскохозяйственной техники определены ежесуточные экономические показатели, которые представлены в таблице:

Вид изделия	Расход сырья, кг	Время изготовления, ч/изд.	Количество изделий	Цена изделий, р.
Плуг	50	120	6	90 000
Борона	40	150	5	14 000
Лущильник	60	420	7	50 000
Каток	90	220	4	300 000

Найти цены на сельскохозяйственную технику, расходы и затраты сырья.

1.27. Коммерческий банк, участвующий в строительстве сети социальных аптек в Ставрополе, предпринял усилия по получению кредитов в 4 коммерческих банках: «Сбербанк», «ВТБ24», «Московский индустриальный банк», «Россельхозбанк». Каждый из них предоставил кредиты в размерах соответственно 10, 30, 20 и 40 млрд р. под годовую процентную ставку 25, 15, 30 и 20 %. Сколько придется платить по истечении года за кредиты, взятые у банков.

1.28. Фирма $П_1$ выпускает продукцию в количестве 10 ед. в день, $П_2$ – 5 ед. в день, $П_3$ – 8 ед. в день. Сколько продукции необходимо выпускать фирме $П_4$, если цена единицы продукции фирмы $П_1$ равна 3 долл., $П_2$ – 6 долл., $П_3$ – 7 долл., $П_4$ – 4 долл., а суммарный доход от реализации произведенной за день продукции не должен быть меньше 152 долл.?

1.29. Затраты на единицу продукции $П_2$ составляют 10 долл., $П_3$ – 9 долл. План производства в день следующий: $П_1$ – 8, $П_2$ – 7, $П_3$ – 10. Каковы должны быть затраты на единицу $П_1$, чтобы ежедневные затраты не превышали 320 долл.?

1.30. Определить минимальную цену единицы продукции $П_3$, если цена единицы $П_1$ – 5 долл., $П_2$ – 4 долл., $П_4$ – 2 долл., чтобы суммарный доход превышал 370 долл. в день, если план выпуска продукции следующий: $П_1$ – 20 ед., $П_2$ – 25 ед., $П_3$ – 30 ед., $П_4$ – 40 ед.

Глава 2. Матричная алгебра

2.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}.$$

Числа a_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$ называются элементами матрицы. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс i указывает номер строки, второй индекс j – номер столбца, в котором расположен элемент.

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C, …., а их элементы – строчными буквами a, b, c,…

При записывании матриц используют круглые или квадратные скобки.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей.

Говорят, что матрица A имеет *размерность* $(m \times n)$, если она состоит из m строк и n столбцов.

***Пример* 2.1.** Примеры матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Матрицы имеют следующие размерности: $A(2 \times 2)$, $B(2 \times 3)$, $C(3 \times 3)$.

Если $m \neq n$, то матрица A – прямоугольная. Если $m = n$, то матрица A – квадратная порядка (размерности) n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В примере 2.1 матрицы A и C – квадратные матрицы порядка (размерности) 2 и 3 соответственно.

Совокупность всех элементов a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратной матрицы A называется *главной диагональю*, элементов a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} – *побочной диагональю*.

В примере 2.1 в матрице C главную диагональ составляют элементы:
0; –5; 4, побочную диагональ: 2; –5; 1.

Квадратная матрица A называется *диагональной,* если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, а элементы главной диагонали отличны от нуля:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *симметричной,* если $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1,2,\dots, n$.

***Пример* 2.2**. Симметричная матрица 4-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & -8 & 9 \\ -4 & 7 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы, расположенные вдоль главной диагонали равны 1, называется *единичной* матрицей и обозначается E:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \dots,\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны 0, называется нижней и верхней треугольной соответственно.

***Пример* 2.3.** Верхняя треугольная матрица 3-го порядка: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

Нижняя треугольная матрица: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Произвольная матрица вида $C = (A|B)$, составленная из двух матриц A и B, разделенных вертикальной чертой, называется *расширенной* матрицей.

***Пример* 2.4.** Расширенная матрица $C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$.

Над матрицами можно производить некоторые арифметические операции:

1) Равенство матриц.

Две матрицы A и B *равны* между собой, если они имеет одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

***Пример* 2.5.** Из приведенных матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

равными являются матрицы A и C, B и D.

2) Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы на число называется матрица, каждый элемент которой равен произведению этого элемента на число.

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \left[\lambda \cdot a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,....,n}} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & ... & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & ... & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & ... & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Формулу (2.1) можно иначе понимать так: общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

3) Сложение матриц.

Суммой матриц одинаковой размерности $A_{(m \times n)}$ и $B_{(m \times n)}$ называется матрица, которая получается сложением соответствующих элементов слагаемых матриц:

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,...,m \\ j=1,2,...,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Свойства сложения матриц:

$A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

***Пример* 2.6.** Найти $A + B$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

По формуле (2.2) $A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+5 \\ 1+6 & 7+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

4) Вычитание матриц.

Разность матриц одинаковой размерности $A_{(m\times n)}$ и $B_{(m\times n)}$ определяется равенством: $A-B=A+(-B)=A+(-1)\cdot B$. С учетом операций 2) и 3) имеем:

$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn}\end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

***Пример* 2.7.** Найти $A-B$, если $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & 2\end{bmatrix}$.

По формуле (2.3) $A-B=\begin{bmatrix}1-0 & 3-5\\ -1-6 & 7-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}$.

5) Произведение матриц.

Произведением матриц A размерности $(m\times n)$ и B размерности $(n\times k)$ называется матрица AB размерности $(m\times k)$, полученная по правилу:

а) количество столбцов матрицы A должно совпадать с количеством строк матрицы B;

б) каждая строка матрицы A умножается поочередно на все столбцы матрицы B, как скалярное произведение векторов:

$$A=[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ B=[b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k}\\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk}\end{pmatrix}$$

$$AB=[(ab)_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,k}}=\begin{pmatrix} (ab)_{11} & (ab)_{12} & \dots & (ab)_{1k}\\ (ab)_{21} & (ab)_{22} & \dots & (ab)_{2k}\\ \vdots & & & \\ (ab)_{m1} & (ab)_{m2} & \dots & (ab)_{mk}\end{pmatrix}= \qquad (2.4)$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1k}+..+a_{1n}b_{nk}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1k}+..+a_{2n}b_{nk}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\dots+a_{mn}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{1k}+..+a_{mn}b_{nk}\end{pmatrix}.$$

***Пример* 2.6.** Даны матрицы: $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -3 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

Найти произведение этих матриц.

Решение: По формуле (2.4)

$$AB=\left[\begin{array}{cc}1 & 6\\ \hline -3 & 8\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c|c}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1\cdot7+6\cdot5 & 1\cdot5+6\cdot2 & 1\cdot1+6\cdot0\\ -3\cdot7+8\cdot5 & -3\cdot5+8\cdot2 & -3\cdot1+8\cdot0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7+30 & 5+12 & 1+0\\ -21+40 & -15+16 & -3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 17 & 1\\ 19 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Свойства произведения матриц:

а) $A(BC)=(AB)C$;

б) $\lambda(AB)=(\lambda A)B$;

в) $(A+B)C=AB+AC$, $A(B+C)=AB+AC$;

г) в общем случае $AB\neq BA$;

д) $EA=AE=A$;

е) $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k}$, $\quad A^0=E.$

Квадратные матрицы A и B порядка n называются *перестановочными,* если $AB=BA$.

6) Транспонирование матриц.

Транспонирование матриц – это замена строк матрицы ее столбцами с сохранением порядка.

В результате транспонирования матрицы $A\,(m\times n)$ получим транспонированную матрицу A^t $(n\times m)$.

***Пример* 2.7.** Дана матрица $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & -6\end{bmatrix}$. В результате транспонирования получим матрицу: $A^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & -6\end{bmatrix}$.

Свойства транспонирования матриц:

а) $(A^t)^t=A$;

б) $(\alpha A)^t=\alpha A^t$, где α – число;

в) $(A+B)^t=A^t+B^t$;

г) $(AB)^t=B^tA^t$.

Задачи

2.1. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ -4 & 3 & 5\\ 6 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Определить размерность заданных матриц. Найти значения элементов
a_{12}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{31}, c_{13}, c_{31}, c_{33}.

2.2. Если $\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $a,\ b,\ c$ и d.

2.3. Если $\begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Найти $a,\ b,\ c$ и d.

2.4. Заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислить, если это возможно:

1. $a)\ C+E,\ E+C;\ b)\ A+B;\ c)\ D-F;$
$d)\ -3C+5O;\ e)\ 2C-3E;\ f)\ 2B+F.$

2. $a)\ 3D+2F;\ b)\ 3(2A),\ 6A;\ c)\ 2A+3A,\ 5A;$
$d)\ 2(D+F),\ 2D+2F;\ e)\ (2+3)D,\ 2D+3D;\ f)\ 3(B+D).$

3. $a)\ A^T,\ \left(A^T\right)^T;\ b)\ \left(C+E\right)^T,\ C^T+E^T;\ c)\ (2D+3F)^T;$
$d)\ D-D^T;\ e)\ 2A^T+B;\ f)\ (3D-2F)^T.$

4. $a)\ \left(2A\right)^T;\ b)\ \left(A-B\right)^T;\ c)\ (3B-2A)^T;$
$d)\ (3A^T-5B^T)^T;\ e)\ (-A)^T,\ -(A^T);\ f)\ (C+E+F^T)^T.$

2.5. Найти матрицу $C = -5A+2B,$ если

$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$ *б)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.6. Найти матрицу $C = A^T - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

2.7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить, если это возможно: *a)* $A+B$; *b)* A^T+B; *c)* $A+B^T$; *d)* $A\cdot B$; *e)* $B\cdot A$; *f)* $A^T\cdot B$; *g)* $A\cdot B^T$; *h)* $A^T\cdot B^T$; *i)* $B^T\cdot A^T$.

2.8. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}y\\ x\\ 1\end{pmatrix}$. Если $A\cdot B=\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$, найти x и y.

2.9. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$. Найти $B^T\cdot A^T\cdot A\cdot B$.

2.10. Найти произведение матриц:

$a)$ $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$,

$c)$ $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$, $d)$ $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

2.11. Решить систему матричных уравнений $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

2.12. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если возможно

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; *b)* $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; *d)* $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.

2.13. Найти матрицу A^n: $a)$ $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $n=3$. $b)$ $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $n=5$.

2.14. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Вычислить: $a)$ A^3, $b)$ B^2, $c)$ $(A\cdot B)^3$.

2.15. Пусть $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$. Найти A^4.

2.16. Даны матрицы $C=\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&4&5\\2&-1&3\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&-1&3\\1&-1&3\end{pmatrix}$. Найти $2G-C^2$.

2.17. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-1&3\\4&1&5\\2&1&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}2&-4&5\\0&1&4\\3&2&1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\\3&5\end{pmatrix}.$$

Вычислить, если это возможно:
$a)\ A\cdot B,\ b)\ F^T\cdot E,\ c)\ C\cdot B+D,\ d)\ A\cdot B+D^2.$

2.18. Даны следующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-3&9&2&4&0\\1&4&-1&3&-1\\0&2&-2&4&2\\3&1&0&-2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&-3&3\\2&1&5&0\\6&7&0&8\\0&-3&1&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&4&5\\2&-1&3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0&0&-3\\2&-1&4\\7&0&1\\2&-2&5\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1&8\\3&-3\\2&4\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\\4&0\\3&5\\0&6\end{pmatrix}.$$

Найти: *a*) все произведения матриц, которые имеют смысл; *b*) соответствующие транспонированные матрицы; *c*) матрицу C^3.

2.19. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:

a) $f(x)=3x^2-2x+5,$ $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$.

b) $f(x)=x^3-7x^2+13x-5,$ $A=\begin{pmatrix}5&2&-3\\1&3&-1\\2&2&1\end{pmatrix}$.

2.20. Три предприятия выпускают четыре вида изделий. Задана матрица выпуска продукции

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}1150 & 1250 & 1020 & 1384\\ 2030 & 3700 & 2700 & 1856\\ 1500 & 990 & 1058 & 720\end{pmatrix},$$

a_{lk} $(l=1,2,3;\ k=1,2,3,4)$ – объем выпущенных изделий k-го вида на l-м предприятии с начала года на конец некоторого месяца. Найти месячный объем выпуска изделий на каждом предприятии, если аналогичная матрица через месяц имела вид

$$B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}2370 & 1980 & 1790 & 1880\\ 3500 & 4736 & 4015 & 2750\\ 2220 & 2112 & 2010 & 1830\end{pmatrix}.$$

2.21. Три типа транспортных самолетов распределены между четырьмя авиалиниями. Заданы матрицы объемов перевозок:

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}15 & 10 & 20 & 50\\ 20 & 25 & 10 & 17\\ 35 & 50 & 30 & 45\end{pmatrix} \text{ и } B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}97 & 54 & 75 & 200\\ 83 & 102 & 49 & 79\\ 71 & 210 & 150 & 180\end{pmatrix},$$

где a_{lk} и b_{lk} $(l=1,2,3;\ k=1,2,3,4)$ – накопленные с начала года объемы перевозок самолетами l типа на k-й авиалинии, соответственно, на 30 апреля и 1 сентября некоторого года.

Найти объемы перевозок, осуществленных самолетами каждого типа по каждой авиалинии за период с 30 апреля по 1 сентября.

2.22. Данные о продукции добывающей промышленности по определенным видам минерального сырья группируются по областям, являющимся основными поставщиками этого сырья. Заданы матрицы добычи:

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}450 & 780 & 210\\ 1050 & 240 & 90\\ 1500 & 120 & 590\end{pmatrix} \text{ и } B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}520 & 910 & 220\\ 1080 & 580 & 290\\ 1460 & 830 & 600\end{pmatrix},$$

где a_{lk} и b_{lk} $(l,k=1,2,3)$ – объемы добычи в тыс. тонн минерального сырья k-го вида в l-й области в два разных года.

Рассчитайте матрицу приростов добычи за период с конца первого года на конец второго. Найти матрицу средних годовых размеров добычи.

2.23. Предприятие выпускает три вида продукции в количествах, характеризуемым вектором $x=(x_1,x_2,x_3)$. При выпуске продукции используют пять видов сырья. Задана матрица расходов сырья $A=\left[a_{lk}\right], a_{lk}$ – расход k-го вида сырья на единицу l-го вида продукции. Вектор c задает стоимость единицы каждого вида сырья.

Определить:

a) необходимое количество единиц сырья каждого вида для обеспечения плана;

b) стоимость сырья для единицы каждого вида продукции;

c) общую стоимость сырья при выполнении плана выпуска при следующих данных:

$$x=\begin{pmatrix}10\\7\\4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}5&4&6\\10&8&12\\3&5&4\\9&6&3\\2&8&10\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}7\\4\\5\\10\\2\end{pmatrix}.$$

2.24. Сведения о продажах торговой фирмы, объединяющей три магазина, заданы матрицами:

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}17&4&12\\6&4&13\\11&4&8\\7&4&6\end{pmatrix},\ B=[b_{lk}]=\begin{pmatrix}20&5&10\\10&5&15\\20&5&8\\10&5&10\end{pmatrix},\ C=[c_{lk}]=\begin{pmatrix}12&3&4\\8&3&4\\10&3&6\\4&3&7\end{pmatrix},$$

где a_{lk}, b_{lk}, c_{lk} – суммы, выученные на протяжении l-го сезона от продажи k-го вида товара по первому, второму и третьему магазинам соответственно.

1. Покажите, что в каждый сезон I и III магазины, вместе взятые, продали больше каждого вида товаров, чем магазин II.

2. Найдите общую выручку от продажи одинаковых товаров тремя магазинами по каждому сезону.

2.25. Компания продает компьютеры пяти моделей *A, B, C, D, E* в трех магазинах 1, 2, 3. Количество компьютеров в каждом из магазинов задано матрицей *M*

A	*B*	*C*	*D*	*E*	
4	2	3	7	1	1
2	3	5	0	6	2
10	4	3	4	3	3

Оптовые цены ω_i и розничные p_i представлены матрицей N

ω_i	p_i	
700	840	*A*
1 400	1 800	*B*
1 800	2 400	*C*
2 700	3 300	*D*
3 500	4 000	*E*

Найдите следующие произведения и дайте интерпретацию каждому из них.
a) *MN; b*) *M* на (1;1;1); *c*) *MN* на (1;1;1).

2.26. Предприятие производит три вида продукции используя четыре типа ресурсов. Цены в рублях единицы каждого вида продукции и типа ресурса постоянны и заданы соответственно векторами $p=(p_1, p_2, p_3)$ и $z=(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Выпуск продукции может производиться одним из двух способов. Первый способ описывается матрицей удельных затрат A_{ij} и обеспечивает вектор выпуска $x=(x_1, x_2, x_3)$, второй – матрицей удельных затрат B_{ij} и обеспечивает вектор выпуска $y=(y_1, y_2, y_3)$. a_{ij}, b_{ij} – затраты в физических единицах i-го вида ресурса на производство j-го вида продукции в первом и втором способах, x_i, y_i – объемы выпуска i-го вида продукции в единицу времени. Какой способ производства дает большую прибыль и насколько? Значения матриц приведены ниже

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 10 & 12 & 15 \\ 6 & 11 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 10 \\ 9 & 15 & 12 \\ 8 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ p=\begin{pmatrix} 110 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix},$$

$$z=\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

2.27. В некоторой отрасли *m* заводов выпускают *n* видов продукции. Матрица $A(m \times n)$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B(m \times n)$ – во втором. Матрица C $(n \times 1)$ – стоимость единиц каждого из видов продукции. Найти:

a) объемы выпущенной продукции за 2 квартала;

b) прирост объемов во втором квартале по видам продукции и заводам;

c) стоимость продукции, выпускаемой каждым заводом.

2.28. Предприятие выпускает три вида продукции, используя два вида сырья, нормы расхода сырья на единицу продукции задаются матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. определить денежные расходы предприятия на выпуск товаров, задаваемый вектором $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, если стоимость единицы каждого вида сырья выражается вектором $P=(2;3)$.

2.29. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B=\begin{pmatrix}2&5&1&2\\1&8&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$ задает количество реализованной мебели i-го типа в j-м регионе. Определить выручку предприятия в каждом регионе, если цена реализации единицы мебели i-го типа задана вектором $A=(100;\ 200;\ 300)$.

2.30. Предприятие выпускает четыре вида продукции в количестве 40, 100, 50 и 120 единиц в день, используя три вида сырья. Расход сырья (в кг на единицу продукции) характеризуется матрицей $A=\begin{pmatrix}2&5&3&1\\4&1&5&3\\1&2&4&4\end{pmatrix}$, где a_{ij} – затраты сырья i-го вида на изготовление единицы продукции j-го вида. Сколько сырья каждого вида расходуется ежедневно?

2.31. Предприятие выпускает три вида продукции в количестве, характеризуемом вектором $x=(1;\ 7;\ 4)$. Для ее изготовления используют пять видов сырья. Расход сырья (в кг. на единицу продукции) характеризуется матрицей $A=\begin{pmatrix}5&4&6\\10&8&12\\3&5&4\\9&6&3\\2&8&10\end{pmatrix}$, где a_{ij} – затраты сырья i-го вида на изготовление единицы продукции j-го вида, вектор $P=(7;\ 4;\ 5;\ 1;\ 2)$ задает стоимость единицы каждого вида сырья. Определить:

a) количество сырья каждого вида, необходимого для обеспечения плана;

b) общую стоимость сырья, необходимого для выпуска всей продукции.

2.2. Определители квадратных матриц

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число, которое считается по заданному правилу и называется *определителем матрицы.*

Порядком определителя называется порядок матрицы, для которой рассматривается данный определитель.

Определитель матрицы обозначается символами:

$$|A|=\det A=\Delta A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Если дана квадратная матрица второго порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

то ее определителем называется число:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}, \qquad (2.5)$$

т.е. определитель матрицы второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали.

***Пример* 2.8.** Найти определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение: $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7$.

Если дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

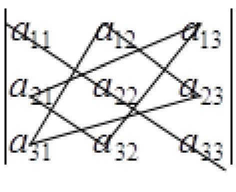
то ее определитель можно найти по нескольким правилам: треугольников, Саррюса, звездочки, разложение определителя по строке или столбцу.

Правило «звездочка»:

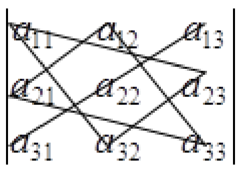
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \qquad (2.6)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

главная диагональ (+):



побочная диагональ (–):



***Пример* 2.9.** Вычислить определитель по формуле (2.6).

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 1 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Минором M_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, полученный вычеркиванием в этой матрице i-й строки и j-го столбца. Порядок минора на одну единицу меньше порядка матрицы.

Алгебраическим дополнением A_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Если матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то, например, ее минор M_{21} находится следующим образом (вычеркиваем вторую строку и первый столбец):

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а алгебраическое дополнение A_{21} вычисляется по формуле:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель порядка n:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Выпишем разложение определителя порядка n:

а) по i-й строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot M_{i2} + \dots +$$

$$+ a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot M_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij};$$

б) по j-му столбцу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot M_{j1} + a_{2j} \cdot (-1)^{2+j} \cdot M_{2j} + \dots +$$

$$+ a_{nj} \cdot (-1)^{n+j} \cdot M_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Это правило называется *разложением определителя* по строке или по столбцу.

При разложении определителя по строке или столбцу целесообразно использовать строку или столбец, содержащие наибольшее количество нулей (тогда число слагаемых сократится). Если таких строк или столбцов нет, то нули можно получить, упростив определитель, используя его свойства.

Свойства определителей:

1) При транспонировании матрицы значение определителя не изменится:

$$|A| = |A^T|.$$

2) Если определитель содержит полностью нулевую строку (столбец), то его значение равно нулю.

3) Значение определителя не изменится, если к одной из его строк (столбцов) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, не равное нулю.

4) Если определитель содержит две одинаковые строки (столбцы), то его значение равно нулю.

5) Если определитель содержит две линейно зависимых строки (столбца), то его значение равно нулю.

6) Если строка (столбец) определителя содержит общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

7) Если строка (столбец) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то его можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8) Определитель матрицы поменяет знак на противоположный при перестановке двух строк (столбцов) местами.

9) Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

***Пример* 2.10.** Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение: Для упрощения определителя выполним следующие действия:
1) первая строка как рабочая останется неизменной;
2) из второй строки вычтем первую, умноженную на 3;
3) к третьей строке прибавим первую;
4) к четвертой строке прибавим первую, умноженную на 2.
В определителе изменятся 2-я, 3-я и 4-я строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 18 \\ 0 & 3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & 13 & -6 \end{vmatrix},$$

после проведенного упрощения мы разложим определитель по первому столбцу, полученный определитель 3-го порядка вычислим по правилу «звездочка»:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 18 \\ 0 & 3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 & 18 \\ 3 & 11 & -2 \\ -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 18 \\ 3 & 11 & -2 \\ -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = 480.$$

Задачи

2.32. Вычислить определители второго порядка:

$a)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$, $c)\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, $d)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $e)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$.

2.33. Найти, при каком значении x определитель $\begin{vmatrix} 4 & x \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ равен 1.

2.34. Вычислить определители третьего порядка:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2.35. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} = 0,$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0,$ *c)* $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2.36. Решить неравенства:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1,$ *b)* $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

2.37. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти определитель матрицы $B = A^T \cdot A.$

2.38. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Найти следующие миноры и алгебраические дополнения этой матрицы: M_{23}, M_{14}, M_{34}, A_{32}, A_{43}, A_{24}.

2.39. Разложить определитель по третьему столбцу: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

2.40. Найти область определения функций

a) $\log_3 \begin{vmatrix} 4 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix},$ *b)* $\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2^{-2x} \\ 2^x & 15 & 2^{3x} \\ -2^{2x} & 2^x & 2^{2x} \end{vmatrix}}.$

2.41. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -6 & 6 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & -7 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & -3 \\ 9 & 7 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.42. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2+1 & 3^{2x} & x & 3^{-x} \\ x^2-1 & 0 & x+1 & 0 \\ x^2 & 3^x & x+2 & 3^{2-x} \\ 0 & 0 & \sin x & 0 \end{vmatrix} = 0$.

2.43. Решить уравнение $\begin{vmatrix} \log_4 x & 0 & 0 & -2 \\ \log_2 x & x & \log_4 x & x^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ x^2 & -3 & 0 & x \end{vmatrix} = -9$.

2.44. Найти значение c, при котором определитель матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & c & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ равен 10^3.

В каких пределах может изменяться определитель матрицы

$A = \begin{pmatrix} c & c & 1 \\ c & 1 & c \\ 1 & c & c \end{pmatrix}$, если $|c| \le 1$?

2.45. Вычислить определитель: $a)\ \begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$,

$b)\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

2.46. Решить уравнение: $a)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ b)\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 1,$

$c)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7,\ d)\ \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & x \\ -1 & x & 0 & -2 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$

2.47. Решить неравенство: $a)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \end{vmatrix} \le 0, b)\ \begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -x & 1 & -1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -x \end{vmatrix} \le 0.$

2.3. Обратная матрица

Матрица A называется *невырожденной* (неособой), если $|A| \neq 0.$ В противном случае она называется *вырожденной* (особой).

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если выполняется условие

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \tag{2.7}$$

где E – единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.

Пусть квадратная матрица A порядка n имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица для A определяется по формуле:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}, \tag{2.8}$$

где $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

Свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1}=A.$
2) $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}.$
3) $(A^{-1})^m=(A^m)^{-1}.$
4) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}.$
5) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$

***Пример* 2.11.** Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение: Вычислим определитель

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=40-1-18-15-4-12=-10\neq 0,$$ значит A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=18,\ A_{21}=-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-13,\ A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=11,$$

$$A_{12}=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=-10,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=5,\ A_{32}=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=16,\ A_{23}=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-11,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=7.$$

Составим присоединенную матрицу из найденных алгебраических дополнений: $A^* = \begin{pmatrix} 18 & -13 & 11 \\ -10 & 5 & -5 \\ 16 & -11 & 7 \end{pmatrix}$.

По формуле (2.8) получаем:

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 18 & -13 & 11 \\ -10 & 18 & -5 \\ 16 & -11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -3{,}6+1{,}3+3{,}3 & -5{,}4+6{,}5-1{,}1 & 1{,}8+2{,}6-4{,}4 \\ 2-0{,}5-1{,}5 & 3-2{,}5+0{,}5 & -1-1+2 \\ -3{,}2+1{,}1+2{,}1 & -4{,}8+5{,}5-0{,}7 & 1{,}6+2{,}2-2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Пример* 2.12.** Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение: Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$, тогда исходное уравнение имеет вид:

$$A \cdot X = B.$$

Умножим обе части этого уравнения на A^{-1} слева, получим

$$A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B.$$

Тогда в силу (2.7) имеем $E \cdot X = A^{-1}B$ и $X = A^{-1}B$.

Таким образом, чтобы решить это уравнение нужно для матрицы A найти обратную и умножить ее на B слева.

Вычислим определитель $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5,$ найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -1, \; A_{21} = -1, \; A_{12} = -3, \; A_{22} = 2.$$

Получаем $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$, тогда

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 9\\ -1 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Проверка: $A\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 9\\ -1 & 11\end{pmatrix}$.

Задачи

2.48. Выяснить, какие из приведенных ниже матриц имеют обратные:

$$a)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix};\quad d)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 7\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

2.49. Найти обратные матрицы, для следующих матриц:

$$a)\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad d)\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

2.50. Определить, при каких значениях α существует матрица, обратная данной: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ \alpha & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2.51. При каком α не существует обратная матрица к матрице

$A=\begin{pmatrix}2 & -\alpha & 2\\ -1 & 5 & -2\\ 4 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

2.52. Решить матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$

Задачи для самостоятельного решения

2.53. Вычислить $B = 11(A^{-1})^t + A^t$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

2.54. Вычислить $D = (P^{-1}X)^t P(P^{-1}X)$, где $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

2.55. Вычислить $D = X^t (P^{-1})^t A P^{-1} X$, где $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

2.56. Решить матричное уравнение $AX + 3X = B$, если $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.57. Решить матричное уравнение $XA = B + X$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

2.58. Решить матричное уравнение: *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$b)\ X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$d)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. Модель Леонтьева межотраслевого баланса

Рассмотрим некоторую систему хозяйства, которая состоит из n отраслей. Предположим, что эта система автономна, т.е. отрасли обмениваются продукцией между собой, не получая ничего извне. Предположим, что весь процесс производства рассматривается за некоторый фиксированный промежуток времени.

Пусть x_i – общий объем продукции i-ой отрасли, x_{ij} – объем i-ой отрасли, потребляемой j-ой отраслью, y_i – объем продукции i-ой отрасли, предназначенной для потребления в непроизводственной сфере, называемый конечным продуктом $i, j = \overline{1, n}$.

В силу автономности системы все переменные связаны *уравнениями баланса*:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + y_i, \ i = \overline{1, n}. \tag{2.9}$$

На основе анализа экономики США В. В. Леонтьевым был сформулирован *принцип линейности материальных затрат*: материальные затраты i-ой отрасли на нужды j-ой отрасли пропорциональны объему продукции i-ой отрасли.

Это означает, что отношение $\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ постоянно для каждой пары (i, j). Вводя коэффициент пропорциональности $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$, называемый *коэффициентом прямых затрат*, получаем равенство

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \tag{2.10}$$

которое характеризует принцип линейности материальных затрат.

В соответствии с (2.10) уравнения баланса принимают вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + y_n, \end{cases} \tag{2.11}$$

или в матричной форме

$$x = Ax + y, \tag{2.12}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – *матрица прямых затрат,*

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *вектор валового выпуска,*

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – *вектор конечного продукта,* $a_{ij}, x_i, y_i \geq 0.$

Уравнение (2.12) называют *моделью Леонтьева межотраслевого баланса*.

Необходимо по матрице прямых затрат A и вектору конечного продукта y определить, существует ли решение x уравнения (2.12). Если решение существует, то матрица прямых затрат A и модель Леонтьева (2.12) называются *продуктивными*. Если решение x уравнения (2.12) существует, то его можно найти по формуле

$$x = (E - A)^{-1} y. \tag{2.13}$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Также для определения продуктивности матрицы прямых затрат можно использовать критерии:

1) Квадратная матрица A продуктивна только в том случае, если матрица $E - A$ обратима и все элементы матрицы $(E - A)^{-1}$ – неотрицательны.

2) Квадратная матрица A продуктивна только в том случае, если максимальное по модулю собственное значение матрицы A меньше 1.

3) Квадратная матрица A продуктивна только в том случае, если сумма элементов любого ее столбца (строки) не превосходит 1, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше 1.

***Пример* 2.13.** Определить, продуктивна ли матрица прямых затрат, если данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени представлены в табл. 1.

Таблица 1

№ отрасли	Отрасль	Потребление			Конечный продукт y	Валовый выпуск x
		1	2	3		
1	Машиностроение	16	18	36	10	80
2	Энергетика	16	36	18	20	90
3	Станкостроение	16	18	36	20	90

Найти валовый выпуск при условии, что конечный продукт 1-й отрасли увеличился втрое, 2-й – вдвое, 3-й – не изменился.

Решение: Найдем значения матрицы прямых затрат по формуле $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$, получим:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{80} & \frac{18}{90} & \frac{36}{90} \\ \frac{16}{80} & \frac{36}{90} & \frac{18}{90} \\ \frac{16}{80} & \frac{18}{90} & \frac{36}{90} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix},$$ вектор валового выпуска $x = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix}$,

вектор конечного продукта $y = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Для определения продуктивности используем первый критерий, найдем

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы найдем обратную матрицу

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}25 & 1{,}75 \\ 1 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}25 & 2{,}75 \end{pmatrix}.$$

Так как все элементы обратной матрицы неотрицательны, то матрица A продуктивна.

Воспользуемся продуктивностью матрицы A и найдем валовый выпуск по формуле (2.13) при условии, что конечный продукт изменился, получим

$$x=(E-A)^{-1}y=\begin{pmatrix}2 & 1{,}25 & 1{,}75\\ 1 & 2{,}5 & 1{,}5\\ 1 & 1{,}25 & 2{,}75\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30\\ 40\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}145\\ 160\\ 135\end{pmatrix}.$$

Если сравнить прежний валовый выпуск $\begin{pmatrix}80\\ 90\\ 90\end{pmatrix}$ и новый $\begin{pmatrix}145\\ 160\\ 135\end{pmatrix}$, то можно сделать вывод, что в машиностроении он увеличился на 81,25 %, в энергетике – примерно на 77,78 %, в станкостроении – на 50 %.

Задачи

2.59. Определить, является ли матрица прямых затрат A в модели Леонтьева продуктивной.

$$a)\,A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix};\quad b)\,A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}$$

2.60. По известной матрице прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}6 & 0{,}2\end{pmatrix}$ и вектору валового продукта $x=\begin{pmatrix}100\\ 200\end{pmatrix}$ в модели Леонтьева найти вектор конечного спроса y.

2.61. Таблица содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить, соответственно, до 60, 70 и 30 усл. ден. ед.

Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
Энергетика	10	10	20	60	100
Машиностроение	20	10	10	10	50

2.62. В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден. ед.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		1	2	
Производство	1	0,3	0,25	300
	2	0,15	0,12	100

Найти плановые объемы валовой продукции отраслей, чистую продукцию отраслей.

Задачи для самостоятельного решения

2.63. Определить, является ли матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}7\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}$ в модели Леонтьева продуктивной?

2.64. В таблице приведены данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени.

Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
	1	2	3		
1	10	20	20	10	60
2	20	30	10	20	80
3	10	10	40	20	80

Определить, продуктивна ли матрица прямых затрат, если продуктивна, найти валовый выпуск при условии, что конечный продукт 1-й отрасли увеличился на 20 %, 2-й – увеличился на 10 %, 3-й – уменьшился на 15 %.

2.65. Пусть для некоторого баланса двух отраслей известна матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}12 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix}$ и вектор конечного потребления $y=(72;10)$. Требуется: *a*) найти соответствующие объемы валового выпуска каждой отрасли; *b*) пусть надо удвоить выпуск конечного продукта второй отрасли. На сколько процентов должны измениться объемы валового выпуска каждой отрасли?

2.66. Пусть для некоторого баланса трех отраслей промышленности известна матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2\end{pmatrix}$ и вектор конечного продукта $y=\begin{pmatrix}30\\ 20\\ 40\end{pmatrix}$. По этим данным составить таблицу баланса рассматриваемых трех отраслей (аналогично табл. 1 из примера 2.13).

2.67. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период между двумя отраслями промышленности в условных единицах. Найти: матрицу прямых затрат, матрицу полных затрат. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если объем выпуска конечного продукта 1-ой отрасли возрастет на 10 %.

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовый выпуск
	1	2		
1	5 000	15 000	80 000	100 000

2	10 000	10 000	180 000	200 000

2.68. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период между тремя отраслями промышленности в усл. ед. Найти: матрицу прямых затрат, матрицу полных затрат. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если

a) конечный продукт 1-й отрасли возрастет на 20 %,

b) конечный продукт 2-й отрасли увеличится вдвое,

c) конечный продукт по каждой отрасли возрастет на 50 %.

Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
	1	2	3		
1	20	70	10	1 000	1 100
2	30	60	10	500	600
3	20	40	90	1 000	1 150

Коэффициенты матрицы прямых затрат считать, взяв четыре цифры после запятой.

2.5. Ранг матрицы

Рангом матрицы A называется максимальное число ее линейно независимых строк (столбцов), ранг матрицы обозначается *r(A)* или *rank(A)*.

Выберем в матрице A $(m \times n)$ любые k строк и k столбцов. Из элементов, находящихся на их пересечении, образуем определитель, который называется *минором* порядка k и обозначается M_k, где $k = \overline{1, \min(m,n)}$.

Ранг матрицы равен максимальному порядку отличного от нуля минора матрицы.

Для вычисления ранга матрицы использую методы:

1) *Метод окаймляющих миноров*.

Следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-го порядка $M_k \neq 0$, то требуют вычисления все миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор M_k (окаймляющие – полученные путем добавления к M_k элементов еще одной строки (столбца) матрицы). Если все окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если среди окаймляющих миноров найдется минор не равный нулю, то вся процедура повторяется для него.

***Пример* 2.14.** Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ методом окаймляющих миноров.

Решение: Выберем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 12 = 18 \neq 0$.

Вычислим окаймляющие миноры:

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$ так как 1-й и 2-й столбцы пропорциональны;

$$M_3'' = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ так как 1-й и 3-й столбцы пропорциональны;

$$M_3''' = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 72 - 6 + 24 + 9 \neq 0.$$

Так как $M_3 \neq 0$, то $r(A) = 3$.

2) *Метод элементарных преобразований*.

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

К элементарным преобразованиям над стоками (столбцами) матрицы относятся:

a) перемена местами строк (столбцов);

b) умножение строки (столбца) на число не равное 0;

c) прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число.

С помощью этих преобразований можно нулевые строки (столбцы), которые можно вычеркнуть и тем самым уменьшить размерность матрицы.

***Пример* 2.15.** Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение: Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Из 2-й строки отнимем 1-ю, умноженную на 2, из 3-й строки отнимем 1-ю, умноженную на 3, получим $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

Из 3-й строки вычтем 2-ю, получится нулевая строка, которую можно вычеркнуть, получим $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

В матрице осталось 2 строки, которые являются линейно независимыми, значит $r(A)=2$.

При вычислении ранга матрицы методы можно комбинировать.

Любой не равный нулю минор матрицы, порядок которого совпадает с рангом матрицы, называется *базисным* минором.

Задачи

2.69. Найти ранг матриц:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&-1&2\\3&-6&5\end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix}2&3&5&1&4\\1&7&2&3&0\\3&10&7&4&4\\0&0&0&2&3\end{pmatrix};\ c)\ A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&2\\3&1&3&1\\0&1&1&0\end{pmatrix};$$

$$d)\ A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&1&-1\\-4&-3&1\end{pmatrix};\ e)\ A=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&1&-1&3\\2&5&1&11\end{pmatrix}.$$

2.70. Расположить матрицы в порядке убывания их рангов:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\4&5&6&1\\5&7&9&2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}.$$

2.71. Сколько линейно независимых строк имеет матрица $C=(BA)^T+A^TB^T-D$, где $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\3&8\end{pmatrix}$?

2.72. При каком значении параметра p матрица $A=\begin{pmatrix}1&3&1&2\\3&9&4&5\\9&5&9&7\\3&7&5&p\end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг?

2.73. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ в зависимости от числа a.

Задачи для самостоятельного решения

2.74. Найти ранг матрицы:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix};$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix};\ d)\ A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{pmatrix}.$$

2.75. Найти ранг матрицы в зависимости от значений параметра λ:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 1\\ 4 & -1 & \lambda & 0\\ 3 & \lambda & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

2.76. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 4 & -1 & 5\\ 2 & -6 & -1\end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4 & 8\\ 3 & 6 & 10 & -4\\ 1 & 3 & 7 & 1\end{pmatrix}.$$

2.77. При каком значении параметра p матрица $A=\begin{pmatrix}p & 1 & 2 & p\\ -1 & 2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ p & 1 & 1 & p\end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг?

2.78. Найти значения λ, при которых матрица

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & \lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2-\lambda-1\\ 1 & -1 & 0 & \lambda+1\end{pmatrix}$$ имеет наименьший ранг.

Глава 3. Системы линейных алгебраических уравнений

3.1. Понятие систем линейных алгебраических уравнений

Совокупность соотношений вида:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

называется *системой* из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Числа a_{ij} называются коэффициентами системы, числа b_i – элементами правых частей.

Систему (3.1) можно представить в матричной форме:

$$AX = B, \tag{3.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица размерности $m \times n$, составленная из коэффициентов при неизвестных,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных членов.

Если к матрице A добавить столбец свободных членов, то получится матрица

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемая *расширенной матрицей* системы (3.1). Знная расширенную матрицу, можно однозначно выписать систему (3.1).

В векторной форме систему (3.1) можно представить

$$x_1a^1 + x_2a^2 + \cdots + x_na^n = B,$$

где $a^1, a^2, \ldots, a^n$ – векторы-столбцы матрицы A. Используя скалярное произведение векторов-строк A_i, $i = \overline{1, m}$ матрицы A на вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ переменных, систему (3.1) можно записать в виде:

$$\left(A^i, X\right) = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Совокупность чисел $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ которая при подстановке в (3.1) обращает все ее уравнения в тождества, называется *решением* системы.

Система (3.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* – если она решений не имеет.

Совместная система (3.1) может иметь единственное решение или бесконечное множество решений.

Если система совместна, то каждое ее решение называется *частным,* совокупность всех частных решений называется *общим решением* системы.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, если больше одного решения – *неопределенной*.

Система называется *неоднородной*, если среди элементов ее правых частей есть хотя бы один отличный от нуля, иначе она называется *однородной*.

Две системы уравнений называются *эквивалентными* (равносильными), если совпадают множества решений этих систем.

3.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим системы, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных $(m = n)$ и определитель матрицы A отличен от нуля.

1) *Метод Крамера*

Если система $AX = B$ такова, что A – квадратная невырожденная матрица, то существует единственное решение $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ этой системы, где

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где $\Delta = |A| \neq 0$, Δ_j – определитель, полученный путем замены в определителе матрицы A j-го столбца столбцом свободных членов B, т.е.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Пример* 3.1.** Решить систему уравнений методом Крамера

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.$$

Решение: Выпишем все компоненты системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система состоит из трех уравнений и трех переменных, значит, матрица A – квадратная. Проверим, является ли матрица A невырожденной, вычислим определитель

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 27 + 4 + 20 - 15 - 24 - 6 = 6,$$

$\Delta = 6 \neq 0$, следовательно, матрица A – невырожденная, система имеет единственное решение.

Найдем определители Δ_j, $j = 1,2,3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 9 + 4 + 20 - 15 - 24 - 2 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 18 + 1 + 10 - 10 - 6 - 3 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 =$$

$$= 9 + 8 + 4 - 3 - 8 - 12 = -2.$$

Находим значения переменных по формуле (5.3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Чтобы убедиться в том, что решение $X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ найдено верно, сделаем проверку:

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 4\cdot\frac{5}{3} + 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 3\cdot\frac{5}{3} + 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\cdot\frac{5}{3} + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12+20-5}{3} \\ \frac{-8+15-1}{3} \\ \frac{-4+10-3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{6}{3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Задачи

3.1. Решить системы методом Крамера:

$$a)\begin{cases}6x_1+x_2+x_3=1,\\2x_1+3x_2+3x_3=1,\\4x_1+2x_2=-1.\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x_1+x_2=5,\\x_1+3x_3=16,\\5x_2-x_3=10.\end{cases}\quad c)\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=6,\\2x_1+3x_2-7x_3=16,\\5x_1+2x_2+x_3=16.\end{cases}$$

$$d)\begin{cases}x_1+2x_2=10,\\3x_1+2x_2+x_3=23,\\x_2+2x_3=13.\end{cases}\quad e)\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}\quad f)\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=3,\\5x-2x_2-2x_3=3,\\x_1+x_2-x_3=-2.\end{cases}$$

3.2. По предписанию врача пациенту необходимо перейти на диету и за сезон употребить питательных веществ, содержащихся во фруктах и ягодах, в количествах, указанных в таблице:

Вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг фруктов			Нормы потребления, г
	клубника	яблоки	смородина	
p_1	3	2	1	30
p_2	1	3	4	70
p_3	1	0	1	20

Определите, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить за сезон, чтобы выполнить предписание врача.

3.3. Три бригады обработали три участка поля. Площади участков и затраты на времени на их обработку представлены в таблице

Участок	Время работы бригады, ч			Площадь участка, га
	1	2	3	
1	2	3	1	10
2	1	5	4	19
3	4	1	3	18

Найти производительность каждой бригады.

3.4. Цех выпускает три вида изделий: I, II и III. При этом применяются три производственных процесса: штамповка, сборка и окраска. Ресурсы труда чел.-ч по каждому из процессов составляет соответственно 40, 40 и 80, а трудоемкость каждого процесса при производстве единицы продукции задается матрицей

$$A=[a_{ij}]=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&4&1\\1&6&4\end{pmatrix},$$

где a_{ij} – число чел.-ч, требующееся для i-й стадии обработки единицы изделия j-го вида. Представьте в матричной форме уравнения, характеризующие равенство используемых и имеющихся ресурсов для каждого процесса. Пусть мощности каждого вида обработки используются полностью. Каков будет при этом выпуск каждого вида продукции?

Задачи для самостоятельного решения

3.5. Решить системы методом Крамера:

$$a)\ \begin{cases}7x_1+2x_2+3x_3=15,\\5x_1-3x_2+2x_3=15,\\10x_1-11x_2+5x_3=36.\end{cases}\quad b)\ \begin{cases}3x_1-x_2+x_3=14,\\x_1-4x_2+3x_3=-2,\\2x_1+5x_2-x_3=27.\end{cases}\quad c)\ \begin{cases}x_1-x_2+x_3=5,\\2x_1-3x_2+2x_3=10,\\5x_1-9x_2-4x_3=34.\end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases}3x_1-4x_2-2x_3=-6,\\5x_1-x_2+x_3=6,\\x_1-2x_2+7x_3=37.\end{cases}\quad e)\begin{cases}7x_1-6x_2-2x_3=24,\\x_1-8x_2+x_3=6,\\3x_1+4x_2-8x_3=-4.\end{cases}\quad f)\ \begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-9,\\-3x_1+4x_2-6x_3=-11,\\x_1-x_2+3x_3=8.\end{cases}$$

3.6. Для изготовления трех видов изделий *A, B, C* предприятие использует три вида сырья: 1, 2 и 3. Нормы расхода сырья на производство одного изделия и общее количество сырья указаны в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Общее количество сырья
	A	*B*	*C*	
1	2	1	1	45
2	1	1	2	40
3	1	0	1	15

1. Записать математическую модель задачи.
2. Сколько изделий каждого вида может выпустить предприятие?
3. Рассчитать суммарную выручку предприятия от продажи продукции, если цена за 1 изделие соответственно равна P = (140; 250; 180) р.

3.7. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн усл. ед. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения 70 %, второго – 40 %. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза. Какова величина прибыли каждого из отделений: *a*) в минувшем году; *b*) в этом году?

2) *Метод обратной матрицы*

Применяется, как и метод Крамера, если $m=n$ и $|A|\neq 0$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме (3.2) $AX=B$, умножим слева обе части уравнения на A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

или

$$X=A^{-1}B. \tag{3.4}$$

Уравнение в матричной форме решено. Для нахождения координат вектора X следует найти обратную матрицу для A и умножить ее на столбец свободных членов B.

***Пример* 3.2.** Решить систему уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение: Составим матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, она невырожденная ($|A| = -10 \neq 0$), имеет обратную матрицу (см. пример 2.11) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix}$.

По формуле (3.4) находим решение системы уравнений

$$X = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 22{,}1 - 12{,}1 \\ 5 - 8{,}5 + 5{,}5 \\ -8 + 18{,}7 - 7{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задачи

3.8. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 7, \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 8x_1 + 6x_2 - x_3 = 21. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -10, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = -13, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 13. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -25, \\ -x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

3.9. На звероферме выращиваются песцы, черно-бурые лисы и норки. Для их питания используются три вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, а также их ресурс в расчете на день

Вид корма	Норма расхода кормов (кг/день)			Ресурс кормов (кг)
	песец	лиса	норка	
I	1	2	2	340
II	2	4	1	440
III	3	1	2	500

Определите, сколько и каких зверьков выращивается на ферме.

3.10. На кондитерскую фабрику перед Новым годом поступили заказы на подарочные наборы конфет. Возможные варианты наборов, их стоимость и оставшиеся товарные запасы на фабрике представлены в таблице

Наименование конфет	Вес конфет в наборе, кг			Запасы конфет, кг
	A	*B*	*C*	
«Сникерс»	0,3	0,2	0,4	600
«Марс»	0,2	0,3	0,2	700
«Баунти»	0,2	0,1	0,1	300

Определите количество подарочных наборов, которые можно сформировать из оставшихся запасов.

3.11.Туристическое агентство заказало издательству выпуск художественных альбомов трех типов *A, B, C*. Затраты ресурсов приведены в таблице

Вид ресурса	Удельные затраты ресурсов на выпуск 1 альбома		
	A	*B*	*C*
Финансы (долл.)	2	1	4
Бумага (листы)	40	20	20
Трудозатраты (чел.-ч)	1	1	2

Издательство для выполнения заказа собирается затратить 3 400 долл., 50 000 листов бумаги и 2 100 чел.-ч. Сколько альбомов каждого типа заказано издательству?

Задачи для самостоятельного решения

3.12. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases} \quad e)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -3, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

3.13. Нормы затрат производственных мощностей цеха на единицу различных видов изделий представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие		
	1	2	3
Оборудование, ч	2	3	4
Сырье, кг	1	4	5
Электроэнергия, кВт·ч	3	4	3

Задан вектор $B = (21;\ 22;\ 22)$ производственных мощностей цеха. Определить план выпуска изделий $x = (x_1;\ x_2;\ x_3)$ в предположении, что производственные мощности цеха используются полностью.

3.13. Цех выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, на один трансформатор второго вида – 3 кг железа и 2 кг проволоки. Вывести расчетную формулу, по которой можно определить количество изготовленных трансформаторов каждого вида, зная количество израсходованного железа C_1 и проволоки C_2. Провести расчет при $C_1 = 37$ кг, $C_2 = 23$ кг.

3) *Метод Гаусса (последовательных исключений неизвестных)*

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований. Разрешается использовать следующие преобразования:

1) Переставлять местами уравнения системы;

2) Умножать любое уравнение системы на число, не равное нулю;

3) Прибавлять к уравнению системы другое уравнение, умноженное на число.

Эти преобразования называются *эквивалентными*, так как они переводят систему линейных алгебраических уравнений в систему, эквивалентную ей.

Если в системе (3.1) $a_{11} \neq 0,$ то оставим первое уравнение без изменения. Исключим переменную x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого умножим первое уравнение на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и сложим со вторым уравнением, умножим на $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и сложим с третьим уравнением и т.д. Таким образом, переменная x_1 будет исключена из всех уравнений, кроме первого. Первое уравнение дальнейшим преобразованиям не подвергается.

Если $a_{22} \neq 0,$ то оставим второе уравнение без изменения. Исключим переменную x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго. Для этого умножим второе уравнение на $\left(-\dfrac{a_{32}}{a_{22}}\right)$ и сложим с третьим уравнением, умножим на $\left(-\dfrac{a_{42}}{a_{22}}\right)$ и сложим с четвертым уравнением и т.д. Таким образом, переменная x_2 будет исключена из всех уравнений, кроме первого и второго. Второе уравнение дальнейшим преобразованиям не подвергается.

Подобным образом исключаем переменную x_3 и т.д.

Если в ходе преобразований получено уравнение, в котором все коэффициенты при переменных равны 0, а свободный член отличен от 0, то исходная система линейных алгебраических уравнений несовместна.

Если в ходе преобразований получено уравнение, в котором все коэффициенты при переменных равны 0, и свободный член равен 0, то это уравнение в дальнейшем можно опускать, преобразуя оставшиеся уравнения.

Если в ходе преобразований удалось привести исходную систему к «треугольному» виду:

$$
\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1,\\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
a'_{nn}x_n &= b'_n,
\end{aligned}
$$

где $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn} \neq 0,$ то она имеет единственное решение, которое легко найти, решая последовательно уравнения, начиная с последнего и постепенно поднимаясь вверх к первому.

Чтобы укоротить запись, описанные преобразования осуществляют не над уравнениями системы, а над строками расширенной матрицы системы.

***Пример* 3.3.** Найти решение системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1,\\
&x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5,\\
&-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -3,\\
&2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3.
\end{aligned}
$$

Решение: Выпишем расширенную матрицу системы:

$$
\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & -2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 4 & 3 & 5\\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3\\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right).
$$

Приведем ее к треугольному виду: сначала выберем рабочую строку, с помощью которой будем получать нули в одном из столбцов матрицы. Удобнее всего взять строку с 1, т.е. вторую строку, которую поменяем местами с первой строкой:

$$
\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & -2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 4 & 3 & 5\\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3\\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5\\ 5 & 3 & -2 & -2 & 1\\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3\\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim
$$

С помощью 1-й строки получим нули в первом столбце, выполнив следующие действия:

– первую строку умножим на (–5) и прибавим ко второй строке;

– первую строку умножим на 3 и прибавим к третьей строке;

– первую строку умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5\\ 0 & 13 & -22 & -17 & -24\\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12\\ 0 & 10 & -11 & -10 & -13 \end{array}\right) \sim
$$

– третью строку поменяем местами со второй и с помощью (–1) получим нули во втором столбце вместо 13 и 10, для этого новую вторую строку умножим:

– на 13 и прибавим к третьей строке;

– на 10 и прибавим к четвертой строке:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 13 & -22 & -17 & -24 \\ 0 & 10 & -11 & -10 & -13 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 160 & 87 & 132 \\ 0 & 0 & 129 & 70 & 107 \end{array}\right)\sim$$

Теперь возникла сложная ситуация, когда ни в третьей, ни в четвертой строке нет 1 или –1. Тогда, чтобы в четвертой строке получить ноль, сделаем следующее: третью строку умножим на (–129), а четвертую на 160, и затем складываем эти строки, результат запишем в четвертую строку, а третью оставим в первоначальном виде:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -20640 & -11223 & -17028 \\ 0 & 0 & -20640 & 11200 & 17120 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 160 & 87 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & -23 & 92 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы привели матрицу к треугольному виду. Так как $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{44} \neq 0,$ система имеет единственное решение. Восстановим систему уравнений из полученной матрицы:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5, \\ -x_2 + 14x_3 + 8x_4 &= 12, \\ 160x_3 + 87x_4 &= 132, \\ -23x_4 &= 92. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения найдем значение x_4 и подставим его в третье уравнение:

$$-23x_4 = 92 \Rightarrow x_4 = \frac{92}{-23} = -4,$$

$$160x_3 + 87\cdot(-4) = 132, \Rightarrow 160x_3 - 348 = 132, \Rightarrow 160x_3 = 132 + 348 = 480,$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{480}{160} = 3,$$

$$-x_2 + 14\cdot 3 + 8\cdot(-4) = 12, \Rightarrow -x_2 + 42 - 32 = -x_2 + 10 = 12, \Rightarrow x_2 = -2,$$

$$x_1 - 2\cdot(-2) + 4\cdot 3 + 3\cdot(-4) = 5, \Rightarrow x_1 + 4 + 12 - 12 = x_1 + 4 = 5, \Rightarrow x_1 = 5 - 4 = 1.$$

Решение: системы: $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$AX=\begin{pmatrix}5&3&-2&-2\\1&-2&4&3\\-3&5&2&-1\\2&6&-3&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-6-6+8\\1+4+12-12\\-3-10+6+4\\2-12-9+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\\-3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

Если систему удалось преобразовать к «трапециевидному» виду

$$\begin{aligned}
a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+...+a'_{1r}x_r+a'_{1r}x_{r+1}+\ldots+a'_{1n}x_n&=b'_1,\\
a'_{22}x_2+...+a'_{2r}x_r+a'_{2r}x_{r+1}+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a'_{rr}x_r+a'_{rr+1}x_{r+1}+\ldots+a'_{rn}x_n&=b'_r,
\end{aligned}$$

где $a'_{11},a'_{22},\ldots,a'_{rr}\neq 0,\ r<n,$ то она имеет бесконечное множество решений, которые объединяются в общее решение системы. Переменные $x_{r+1},\ldots,x_n$ переносятся в правую часть уравнений и объявляются *свободными* (они могут принимать различные числовые значения). Переменные $x_1,\ldots,x_r$ *– базисными*, они выражаются через свободные переменные, для этого уравнения укороченной системы решаются относительно базисных переменных $x_1,\ldots,x_r$, начиная с нижнего и поднимаясь вверх.

***Пример* 3.4.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&2x_1-x_2+3x_3+4x_4=-1,\\
&x_1+2x_2-3x_3+x_4=2,\\
&5x_1-5x_2+12x_3+11x_4=-5,\\
&x_1-3x_2+6x_3+3x_4=-3.
\end{aligned}$$

Решение: Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&3&4&-1\\1&2&-3&1&2\\5&-5&12&11&-5\\1&-6&6&3&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\2&-1&3&4&-1\\5&-5&12&11&-5\\1&-6&6&3&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\\0&-15&27&6&-15\\0&-5&9&2&-5\end{array}\right)\sim$$

Третью строку сократим на общий множитель 3 и вычтем из нее вторую строку, из четвертой строки вычтем вторую строку:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\\0&-5&9&2&-5\\0&-5&9&2&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\end{array}\right).$$

Нулевые строки расширенной матрицы можно опустить. Переменные x_1 и x_2 объявляем базисными, а свободными x_3 и x_4. Восстановим систему уравнений и перенесем свободные переменные в правые части уравнений с противоположным знаком:

$$\begin{array}{l}x_1+2x_2-3x_3+x_4=2,\\0x_1-5x_2+9x_3+2x_4=-5,\end{array}\Rightarrow\begin{array}{r}x_1+2x_2-3x_3+x_4=2,\\-5x_2+9x_3+2x_4=-5,\end{array}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{r}x_1+2x_2=3x_3-x_4+2,\\-5x_2=-9x_3-2x_4-5,\end{array}$$

Обозначим свободные переменные $x_3=c_1$ и $x_4=c_2$, тогда

$$\begin{array}{r}x_1+2x_2=3c_1-c_2+2,\\-5x_2=-9c_1-2c_2-5,\end{array}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{l}x_2=\dfrac{-9c_1-2c_2-5}{-5}=\dfrac{9}{5}c_1+\dfrac{2}{5}c_2+1,\\x_1+2\cdot\left(\dfrac{9}{5}c_1+\dfrac{2}{5}c_2+1\right)=3c_1-c_2+2,\end{array}\Rightarrow$$

$$x_2=\frac{9}{5}c_1+\frac{2}{5}c_2+1,$$

$$x_1+\frac{18}{5}c_1+\frac{4}{5}c_2+2=3c_1-c_2+2,\Rightarrow x_1=-\frac{18}{5}c_1-\frac{4}{5}c_2-2+3c_1-c_2+2,\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{-18+15}{5}c_1+\frac{-4-5}{5}c_2=\frac{-3}{5}c_1-\frac{9}{5}c_2,$$

$$x_1=-\frac{3}{5}c_1-\frac{9}{5}c_2.$$

Общее решение системы запишем в виде:

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}c_1-\frac{9}{5}c_2 \\ \frac{9}{5}c_1+\frac{2}{5}c_2+1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Константы c_1, c_2 принимают произвольные значения. Если им задать конкретные числовые значения, то можно найти частное решение системы:

$$X_ч=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\cdot 5-\frac{9}{5}\cdot 10 \\ \frac{9}{5}\cdot 5+\frac{2}{5}\cdot 10+1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-18 \\ 9+4+1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

***Пример* 3.5.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} &4x_1-2x_2+5x_3-6x_4+x_5=2, \\ &2x_1+4x_2-3x_3+x_4-6x_5=3, \\ &2x_1-16x_2+19x_3-15x_4+20x_5=7. \end{aligned}$$

Решение: Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 5 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & -16 & 19 & -15 & 20 & 7 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & -16 & 19 & -15 & 20 & 7 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & -4 \\ 0 & -20 & 22 & -16 & 26 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & -4 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Система не совместна, так как последняя строка расширенной матрицы равносильна уравнению $0=-6$.

Преимущества метода Гаусса по сравнению с методами обратной матрицы и Крамера, состоят в том, что он применим к любой системе (3.1), позволяет исследовать ее совместность и в случае совместности найти решение.

***Пример* 3.6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$$

a) методом обратной матрицы;

b) методом Крамера,

c) методом Гаусса.

Решение:

a) Составим матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, она невырожденная ($|A| = -10 \neq 0$), имеет обратную матрицу (см. пример 2.11) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix}$.

По формуле (3.4) находим решение системы уравнений

$$X = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8 - 6{,}5 + 7{,}7 \\ -1 + 2{,}5 - 3{,}5 \\ 1{,}6 - 5{,}5 + 4{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Вычислим $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 40 - 1 - 18 - 15 - 4 - 12 = -10 \neq 0,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 5 - 42 - 35 + 2 + 60 = -30,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -40 + 7 + 6 + 15 + 28 + 4 = 20,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -70 - 1 + 45 - 15 + 10 + 21 = -10,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30}{-10} = 3, \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{-10} = -2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-10}{-10} = 1.$$

c) Приведем расширенную матрицу к треугольному виду:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & 5 & 2 & -5\\ -3 & 1 & 4 & -7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -5\\ 0 & -7 & -5 & 9\\ 0 & 16 & 10 & -22\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -5\\ 0 & 7 & 5 & -9\\ 0 & 0 & -10 & -10\end{array}\right),$$

Запишем укороченную систему:

$$\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=-5,\\ \quad 7x_2+5x_3=-9,\\ \qquad -10x_3=-10,\end{cases}$$

решая которую снизу вверх, последовательно найдем $x_3=1$, $x_2=(-9-5):7=-2$, $x_1=-5-2+10=3$.

Задачи

3.15. Решить системы уравнений методом Гаусса:

a) $\begin{cases} 3x+2y-z=4,\\ 2x-y+3z=9,\\ x-2y+2z=3.\end{cases}$ *b* $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1,\\ 4x_1+x_2=-2,\\ -2x_1+2x_2+x_3=7.\end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5,\\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1,\\ -x_1+4x_2-3x_3+x_4=6,\\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1.\end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3,\\ 3x_1-x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4,\\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7.\end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\ 2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=22,\\ 3x_1+2x_2+x_3=47,\\ x_1+3x_2-x_3=18.\end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3,\\ 2x_1+3x_2+2x_3=7,\\ 3x_1+x_2+x_3=5,\\ 5x_1-x_2-x_3=3.\end{cases}$ *h)* $\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4,\\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2,\\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3.\end{cases}$ *i)* $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6,\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4,\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2.\end{cases}$

3.16. Фирмой было выделено 236 тыс. усл. ед. для покупки 29 предметов для оборудования офиса: несколько компьютеров по цене 20 тыс. усл. ед. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. усл. ед. за стол, стульев по 1,5 тыс. усл. ед. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. усл. ед., а столы – по 8 тыс. усл. ед. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выяснить, какое количество единиц каждого вида оборудования было приобретено.

3.17. Предприятие выпускает три вида продукции: A, B и C. Уровень выпуска лимитируется ограниченностью имеющихся ресурсов: сырья, материалов и оборудования. Числовые данные задачи указаны в таблице:

Ресурсы	Запасы ресурсов	Нормы затрат ресурсов на одно изделие продукции вида		
		A	*B*	*C*
Сырье, кг	24	5	7	4
Материалы, кг	75	10	5	20
Оборудование, ед.	10	5	2	1

Определить объем выпуска продукции каждого вида, предполагая полное использование ресурсов.

3.18. Из пункта A в пункт B нужно перевести оборудование трех типов в количестве: 1-го – 95 ед., 2-го – 100 ед., 3-го – 185 ед. Для перевозки оборудования используется три вида транспорта. Задана матрица грузоподъемности транспорта: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, где a_{ij} –количество единиц оборудования i-го типа, размещаемых при перевозке в каждой единице j-го вида транспорта. Сколько единиц транспорта каждого вида должен заказать завод при условии полного его использования для перевозки оборудования?

3.19. Предприятие использует три вида сырья, выпуская два вида продукции. В таблице приведены данные производства в усл. ед. затрат на производство одного изделия. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции		Запас сырья
	Продукция 1	Продукция 2	
1	2	3	8 000
2	1	4	9 000
3	5	2	7 000

Задачи для самостоятельного решения

3.20. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$a)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_3 = 1. \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ 2x + 3y - 4z = -5, \\ 3x + y + z = 3. \end{cases} \quad e)\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4,\\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases} \quad g)\ \begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1,\\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7,\\ 9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5=2,\\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3. \end{cases}$$

$$h)\ \begin{cases} x_1+5x_2+3x_3=2,\\ 2x_1+9x_2+5x_3+3x_4=7,\\ x_1+3x_2+x_3+6x_4=8. \end{cases}$$

3.21. Из листового материала необходимо скроить 360 заготовок типа *A*, 300 заготовок типа *B*, 675 – типа *C*. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице.

Тип заготовки	Количество заготовок на один лист при способах раскроя		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Сколько листов материала будет раскроено каждым из трех способов для выполнения задания?

3.22. Обувная фабрика выпускает четыре вида продукции: мужскую обувь, женскую обувь, детскую обувь и изделия по уходу за обувью. В таблице приведены данные производства в усл. ед. затрат на производство одного изделия.

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции				Запас сырья
	Мужская обувь	Женская обувь	Детская обувь	Изделия по уходу за обувью	
1	20	10	10	0	5 000
2	30	40	20	1	12 000
3	20	60	10	1	11 000
4	10	50	5	0	7 000

Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

3.3. Исследование совместности систем линейных алгебраических уравнений

Теорема (Кронекера-Капелли). Для того, чтобы система (3.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы *A* был равен рангу расширенной матрицы

$$r(A)=r(\overline{A})=r. \tag{3.5}$$

Если систему (3.1) представить в векторной форме

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_n a^n = B,$$

то можно сказать, что система имеет хотя бы одно решение в том и только том случае, когда вектор B есть линейная комбинация векторов $a^1, a^2, \ldots, a^n,$ а это значит, что число линейно независимых столбцов обеих матриц одинаково.

Равенство (3.5) означает, что r строк матриц линейно независимы, а остальные $(m-r)$ строк $(m-r>0)$ являются их линейными комбинациями, или $(m-r)$ уравнений системы являются линейными комбинациями остальных.

Пусть M_r – некоторый минор r – го порядка, не равный 0. Этот минор называется *базисным*. Отбросим $(m-r)$ уравнений системы, коэффициенты которых не вошли в базисный минор и получим укороченную систему. Переменные, коэффициенты которых вошли в базисный минор, объявляем за базисные, остальные $(n-r)$ за свободные и переносим их в правые части уравнений с противоположным знаком. Укороченная система содержит r уравнений с r базисными переменными, поскольку $M_r \neq 0,$ то эту систему можно решить, например, методом Крамера. В результате решения базисные переменные будут выражены через свободные, которые могут принимать различные числовые значения и записывают общее решение системы.

***Пример* 3.7.** Исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 15. \end{cases}$$

Решение: Для нахождения рангов используем метод окаймляющих миноров. Выберем минор 2-го прядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$ пересчитаем окаймляющие его миноры 3-го порядка $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2,$

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 5 & -3 & 15 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(\overline{A}) = 2,$ так как ранги совпадают по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

В качестве базисного минора выберем $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$ переменные x_1, x_2 объявляем за базисные, x_3 – за свободную переменную и переносим ее в правую часть уравнений. Оставляем первое и второе уравнения, третье – отбрасываем. Получаем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3, \\ 3x_1 - x_2 = 8 - 3x_3, \end{cases}$$

которую решаем методом Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+2x_3 & 1 \\ 8-3x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-2x_3-8+3x_3}{-4} = \frac{-9+x_3}{-4} = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{9}{4},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2x_3 \\ 3 & 8-3x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8-3x_3-3-6x_3}{-4} = \frac{5-9x_3}{-4} = \frac{9}{4}x_3 - \frac{5}{4}.$$

Положим $x_3 = C$ и запишем общее решение системы $X(C) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}C + \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4}C - \frac{5}{4} \\ C \end{pmatrix}$.

Из теоремы Кронекера-Капелли следуют заключения:

1. Система уравнений несовместна (не имеет решения), если $r(A) \neq r(\overline{A})$.

2. Система уравнений имеет единственное решение, если $r = m = n$, т.е. ранг матриц совпадает с числом уравнений и числом переменных системы.

Это решение можно найти по любому из методов, описанных в пункте 3.2.

3. Система уравнений имеет бесконечное множество решений (общее решение), если $r \leq \min(m, n)$. Это решение можно найти методом Гаусса или с использованием базисного минора как в примере 3.7.

Задачи

3.23. Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение следующих систем уравнений:

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5, \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases}$

$$d)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases} \quad e)\ \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=4, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4=4, \\ x_1+x_2-2x_3-2x_4=2, \\ 4x_1+3x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+3x_5=3, \\ 5x_1+4x_2-4x_3-4x_4+15x_5=9, \\ 3x_1+2x_2-2x_3-2x_4+7x_5=5. \end{cases}$$

3.24. Два садоводства поставляют томаты в три овощных магазина. Данные о затратах (в р.) на перевозку одной тонны томатов, спросе и предложении приведены в таблице

Номер садоводства	Стоимость перевозки одной тонны томатов в магазин			Предложение садоводств
	I	II	III	
I	3	7	6	24
II	4	8	2	26
Спрос магазинов	10	20	10	

Составить математическую модель задачи, при котором транспортные расходы составляют 196 р.

3.25. Исследовать систему уравнений относительно параметра α и найти общее решение

$$\begin{cases} -x_1+3x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+\alpha x_3=1, \\ -x_2+3x_3=-1. \end{cases}$$

3.26. Задана матрица удельной эксплуатации трех машин:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – время в часах эксплуатации i – й машины при изготовлении одного изделия j – го вида. Каждая машина работает непрерывно 8 ч.

а) Составить математическую модель задачи для определения плана выпуска изделий указанных видов, при котором полностью используется рабочее время каждой машины.

б) Решить систему уравнений в предположении, что неизвестные могут принимать только целые неотрицательные значения.

Задачи для самостоятельного решения

3.27. Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение следующих систем уравнений:

$$a)\ \begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-3x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=2. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 5x_1+12x_2+5x_3+3x_4=10, \\ 4x_1+3x_2+x_3+3x_4=2, \\ 11x_1+11x_2+4x_3+8x_4=8. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 - 18x_4 = -1. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5, \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases} \qquad f)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

3.28. Найти решение системы в зависимости от параметра a:

$$a)\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^2. \end{cases}$$

3.29. Предприятие выпускает 4 вида продукции из 3 видов сырья. Задана матрица удельных расходов сырья:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – количество единиц сырья i – го вида, потребляемого при выпуске одной единицы продукции j – го вида.

Сколько единиц продукции каждого вида выпускает предприятие, если наличные ресурсы сырья соответственно 35 кг, 30 кг и 30 кг используются полностью?

3.30. В хозяйстве установили, что откорм животных выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе 11 единиц питательного вещества A, 21 единицу питательного вещества B и 18 единиц питательного вещества C. Для откорма животных используют четыре вида кормов. В таблице указано содержание питательных веществ в 1 кг каждого вида кормов и цена 1 кг кормов:

Виды питательных веществ	Содержание питательных веществ в 1 кг				Норма питательных веществ
	1	2	3	4	
A	1	2	1	1	11
B	3	2	1	3	21
C	0	4	3	2	18
Цена 1 кг кормов	3	5	4	3	

Составить рацион питания животных стоимостью 36 р., содержащий суточную норму питательных веществ.

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава 4. Понятие производной

4.1. Односторонние и бесконечные производные

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки *x*, $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ приращение функции в точке *x*, соответствующее приращению аргумента Δx. Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то его называют *производной* функции $y = f(x)$ в точке *x* и обозначают

$$f'(x),\ y'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Операцию нахождения производной называют *дифференцированием* функции.

Физический смысл производной: величина $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ равна *средней скорости* изменения функции $y = f(x)$ при изменении аргумента от x до $x + \Delta x$, а производная $f'(x)$ – *мгновенной скорости* изменения функции $y = f(x)$ в точке x.

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \infty\ (+\infty, -\infty)$, то говорят, что в точке x функция $y = f(x)$ имеет *бесконечную производную* (бесконечную производную знака «+», бесконечную производную знака «–»).

Правостороннюю $f'_+(x)$ и *левостороннюю* $f'_-(x)$ производные функции $y = f(x)$ в точке x определяют равенствами

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},\ f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ называют односторонними.

Для существования производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x необходимо и достаточно, чтобы в этой точке обе односторонние производные существовали и были равны между собой, т.е. $f'_+(x) = f'_-(x)$, при этом $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$.

Значение производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ равно угловому коэффициенту $k = tg\varphi$ касательной TT' к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, см. рис. 4.1 (геометрический смысл производной).

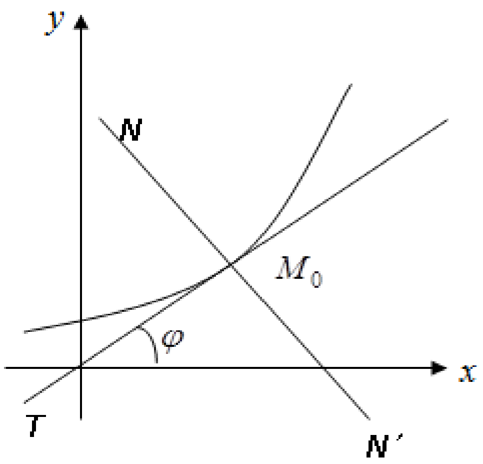


Рис. 4.1. Геометрический смысл производной

Уравнение касательной TT' к графику функции $y=f(x)$ в его точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали NN' к графику функции $y=f(x)$ в его точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$x-x_0+f'(x_0)(y-y_0)=0.$$

Углом между двумя кривыми в их общей точке называют угол между касательными к этим кривым в рассматриваемой точке.

***Пример* 4.1.** Для функции $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ -x^2+2x, & x>1 \end{cases}$ найти односторонние производные $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Определить, имеет ли функция в точке $x=1$ производную.

Решение: При $x\le 1$ функция определяется формулой $f(x)=x$, поэтому

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=1.$$

При $x>1$ функция $f(x)=-x^2+2x$, следовательно,

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{-(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)-1}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{-1-2\Delta x-(\Delta x)^2+2+2\Delta x-1}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to +0}\Delta x=0.$$

Итак, $f'_+(1)=1$, $f'_-(1)=0$. Поскольку $f'_+(1)\ne f'_-(1)$, то производная $f'(1)$ не существует.

Для вычисления производных следует использовать таблицу производных основных элементарных функций и правила дифференцирования.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^{a}\right)' = a \cdot x^{a-1},\ a \neq 0.$

2. 2. $(\sin x)' = \cos x$. 3. $(\cos x)' = -\sin x.$

4. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 5. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. 6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 8. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. 9. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

10. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a, a > 0, a -$ действительное число. 11. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

12. $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,$ 13. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

$a -$ действительное число.

Основные правила дифференцирования

Пусть $c -$ постоянная величина и функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, тогда

1. $(c)' = 0$ 2. $(cu)' = c \cdot u'$ 3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ 5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$.

***Пример* 4.2.** Применяя таблицу производных и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$; 2) $y = x^3 \cdot arctgx$;

3) $y = x\sqrt{x} \cdot (3\ln x - 2)$; 4) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;

Решение:

1) $y' = \left(2x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + (7x)' + (4)' = 2\left(x^3\right)' - 5\left(x^2\right)' + 7(x)' + 0 =$

$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 = 6x^2 - 10x + 7$.

2) $y' = \left(x^3\right)' arctgx + x^3 (arctgx)' = 3x^2 arctgx + \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

3) Перепишем функцию в следующем виде $y = x^{3/2} \cdot (3\ln x - 2)$, тогда

$y' = \left(x^{3/2}\right)' \cdot (3\ln x - 2) + x^{3/2} \cdot (3\ln x - 2)' = \dfrac{3}{2} x^{1/2} \cdot (3\ln x - 2) + x^{3/2} \cdot \dfrac{3}{x} =$

$$=\frac{9}{2}x^{1/2}\cdot\ln x-3x^{1/2}+3x^{1/2}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

4) $$y'=\frac{(\sin x-\cos x)'\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

***Пример* 4.3.** Вычислить $f'(x_0)$, если

1) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+\frac{16}{x},\ x_0=8;$ 2) $f(x)=x^2\cdot\cos(x-2),\ x_0=2.$

Решение: При решении данных примеров следует сначала найти производные $f'(x)$, а затем вычислить их значения в точках x_0:

1) $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{16}{x^2};\ f'(8)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}-\frac{16}{8^2}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=-\frac{7}{12};$

2) $f'(x)=2x\cos(x-2)-x^2\sin(x-2);\quad f'(2)=2\cdot 2\cos 0-2^2\sin 0=4.$

4.2. Производная сложной функции

Пусть функция y зависит от переменной z, $y=f(z)$, а переменная z в свою очередь является функцией от независимой переменной x, $z=u(x)$, т.е. задана сложная функция $y=f(u(x))$.

Если $y=f(z)$ и $z=u(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточной переменной z, умноженной на производную самой переменной z – производную внутренней функции $u(x)$ по независимой переменной x, т.е.

$$y'=\left(f\left(u(x)\right)\right)'=f'(u(x))\cdot u'(x). \tag{4.1}$$

***Пример* 4.4.** Вычислить производную сложной функции. 2

1) $y=(2x^5+3)^4;$ 2) $y=\sin\ (2x+5);$

3) $y=\ln tg\frac{x}{2};$ 4) $y=\arcsin\frac{2x^2}{1+x^4},\ |x<1|;$

5) $y=e^x\cdot arctge^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}.$

Решение:

1) Применим формулу (4.1) производной сложной функции, учитывая, что промежуточный аргумент $u=\left(2x^5+3\right)$, а $f(u)=u^4$. Вычислим

$$f'(u)=4u^3,\ u'(x)=\left(2x^5+3\right)'=10x^4,$$

подставляя в формулу (4.1), получим

$$y'=y'_x(x)=4\left(2x^5+3\right)^3\cdot 10x^4=40x^4\cdot\left(2x^5+3\right)^3.$$

2) $y'=\cos(2x+5)\cdot(2x+5)'=2\cos(2x+5)$.

3) При нахождении производной здесь последовательно дважды используется формула производной сложной функции:

$$y'=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\left(tg\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}.$$

4)

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x^2}{1+x^4}\right)'=$$

$$=\frac{\left(1+x^4\right)}{\sqrt{\left(1+2x^2+x^4\right)\left(1-2x^2+x^4\right)}}\cdot\frac{4x\cdot\left(1+x^4\right)-4x^3\cdot 2x^2}{\left(1+x^4\right)^2}=.$$

$$=\frac{1}{\left(1-x^4\right)}\cdot\frac{4x\cdot\left(1-x^4\right)}{\left(1+x^4\right)}=\frac{4x}{\left(1+x^4\right)}.$$

5) Используя свойства логарифма, перепишем исходную функцию в виде $y=e^x\cdot arctge^x-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)$ и вычислим производную

$$y'=\left(e^x\cdot arctge^x\right)'-\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)\right)'=(e^x)'\cdot arctge^x+e^x\cdot\left(arctge^x\right)'=e^x\cdot arctge^x+$$

$$+e^x\cdot\frac{1}{1+\left(e^x\right)^2}\cdot e^x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot 2e^{2x}=e^x\cdot arctge^x+\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x\cdot arctge^x.$$

Задачи

4.1. Вычислить производные функций:

1) $y = 3 - 2x + x^3$;

2) $y = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$;

3) $y = x\cos x$;

4) $y = \cos x \cdot \sqrt[3]{x^5}$;

5) $y = \dfrac{x}{\sin x}$;

6) $y = \dfrac{arctgx}{x}$;

7) $y = x\ln x + 2^x$;

8) $y = x\log_2 x - \dfrac{e^x}{x}$;

9) $y = (2x+1)^{10}$;

10) $y = \sqrt{(1-3x)^3}$;

11) $y = \arcsin 2x$;

12) $y = arcctg(2x+1)$;

13) $y = \sqrt{1-x^2}$;

14) $y = \sqrt{1-\cos x}$;

15) $y = \arcsin\sqrt{x}$;

16) $y = arctg\sqrt{x^3}$;

17) $y = \cos^2 x$;

18) $y = \sin x^2$;

19) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$;

20) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$;

21) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$;

22) $y = \sin\sqrt{x} + \sqrt{\sin x}$;

23) $y = \ln(x^2-1) - 2\ln(x-1)$;

24) $y = \ln(\sin 3x)$;

25) $y = \ln^2 x - \ln x^2$;

26) $y = e^{\sin 4x}\cos 4x$;

27) $y = (x^3 - 3x^2 + 6x)e^x$;

28) $y = \ln tg\, x$;

29) $y = \ln(1-\cos x)$;

30) $y = \dfrac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\dfrac{1+x}{2}$.

4.2. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$; вычислить $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.

4.3. Дана функция $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$; вычислить $f'(2) - f'(-2)$.

4.4. Дана функция $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$; вычислить $0{,}01 \cdot f'(0{,}01)$.

4.5. Дана функция $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos x}$; вычислить $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

4.6. Дана функция $f(x)=e^{-\frac{x}{a}}\cdot\cos\dfrac{x}{a}$; показать, что $f(0)+a\,f'(0)=0$.

4.7. Дана функция $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$; показать, что $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.

4.4. Производные высших порядков

Производная функции $f(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией. *Производной второго порядка* функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной и обозначается $f''(x)$, то есть $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$.

Производной n-го порядка или *n-й производной*, обозначаемой $f^{(n)}(x)$, называется производная от $(n-1)$-й производной, то есть $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, $n=2,3,\ldots$

***Пример* 4.5.** Найти производную второго порядка функции

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Решение: Так как

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

то

$$y''=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

Задачи

4.8. Найти производные второго порядка функций:

$y=\sin^2 x$; 2) $y=tg\,x$; 3) $y=\sqrt{1+x^2}$.

4.9. Найти производные третьего порядка функций:

$y=\cos^2 x$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2}$; 3) $y=x\sin x$.

4.10. Дана функция $y=\arcsin\dfrac{1}{2}$; вычислить $y(2),\ y'(2),\ y''(2)$.

4.11. Показать, что функция $y=e^x\cos x$ удовлетворяет уравнению

$$y^{IV}+4y=0.$$

4.12. Показать, что функция $y=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ удовлетворяет уравнению

$$x^3y''-xy'+y=0.$$

4.5. *Понятие дифференциала. Вычисление приближенного числового значения функции*

Дифференциалом функции $y=f(x)$ (или *дифференциалом первого порядка*) называется произведение производной этой функции $f'(x)$ на произвольное приращение аргумента Δx

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Дифференциал аргумента равен приращению аргумента: $dx=\Delta x$. Поэтому дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента

$$dy=f'(x)dx.$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка

$$d^2y=f''(x)dx^2,$$

то есть дифференциал второго порядка функции $y=f(x)$ равен произведению второй производной функции этой функции на квадрат дифференциала аргумента.

***Пример* 4.6.** Найти дифференциал первого порядка функций:

1) $y=(x^3-2)^4$;

2) $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

Решение:

1) Воспользуемся формулой дифференциала первого порядка

$$dy=\left((x^3-2)^4\right)'dx=4\cdot(x^3-2)^3\cdot 3x^2dx=12x^2(x^3-2)^3dx.$$

2) Аналогично

$$dy=\left(\ln\sin\sqrt{x}\right)'dx=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{ctg\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}}.$$

***Пример* 4.7.** Найти дифференциал второго порядка функций:

1) $y=\ln\sin^2 2x$;

2) $y=e^{-x}$.

Решение:

1) Воспользуемся формулой дифференциала второго порядка, для этого вычислим производные первого и второго порядка функции

$$y' = \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 4ctg 2x,$$

$$y'' = -4 \cdot \frac{1}{\sin^2 2x} \cdot 2 = -\frac{8}{\sin^2 2x},$$

тогда

$$d^2 y = -\frac{8}{\sin^2 2x} dx^2.$$

2) Аналогично

$$y' = -e^{-x},\ y'' = e^{-x},$$

тогда

$$d^2 y = e^{-x} dx^2.$$

Пусть дана функция $y = f(x)$; приращение этой функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, ее дифференциал $dy = f'(x)dx$. При достаточно малых (близких к нулю) приращениях аргумента Δx будем считать, что $\Delta y \approx dy$, то есть что приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим

$$f'(x)dx \approx f(x + \Delta x) - f(x),$$

откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Применение этой формулы дает значительное упрощение вычисления числового значения функции.

***Пример* 4.8.** Найти: $1{,}005^{0,5}$; $\arcsin 0{,}51$.

Решение:

1) Полагая $f(x) = x^n$, найдем $f'(x) = nx^{n-1}$, поэтому согласно формуле: $(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x$. Таким образом, для $x = 1$ получим

$$1{,}005^{0,5} \approx 1^{0,5} + 0{,}5 \cdot 1^{-0,5} \cdot 0{,}005 = 1{,}0025.$$

2) Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, полагая $x = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$ имеем

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x = \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Delta x.$$

Следовательно,

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}012 = 0{,}535.$$

Задачи

4.13. Найти дифференциал первого порядка функций:

$y = x^5 - 3x^4 + 2x$; 5) $y = \sqrt{1+x^3}$;

$y = \sin 2x - x^2$; 6) $y = \ln\sin x$;

$y = x^3 + \ln 5x$; 7) $y = x\ln x - x$;

$y = \sin^2 9x$; 8) $y = \arccos x^2$.

4.14. Найти дифференциал второго порядка функций:

$y = \ln\cos^2 x$; 3) $y = a^{3x}$;

$y = \ln tg 2x$; 4) $y = \arccos x$.

4.15. Используя понятие дифференциала, приближенно вычислить

1) $e^{0,2}$; 4) $17^{0,25}$;

2) $\sin 29^\circ$; 5) $\cos 151^\circ$;

3) $\ln 1{,}02$; 6) $arctg\, 1{,}05$.

4.6. Правило Лопиталя

Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ обе бесконечно малые или бесконечно большие функции. Тогда их отношение не определено в точке $x = a$, и в этом случае говорят, что оно представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или соответственно $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия такой неопределенности можно использовать *правило Лопиталя*: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Пример* 4.9.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}$.

Решение: Имеем отношение двух бесконечно больших функций, поэтому, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln\sin 5x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x\sin 3x}{5\cos 5x\sin 5x}=$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=1.$$

Правило Лопиталя можно применять и для раскрытия неопределенности вида $0\cdot\infty$. Для этого произведение $f(x)\cdot g(x)$ следует записать в виде $\dfrac{f(x)}{\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]}$ (или $\dfrac{g(x)}{\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]}$) и получить неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

***Пример* 4.10.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение: Чтобы раскрыть неопределенность типа $0\cdot\infty$, представим произведение в виде отношения двух бесконечно малых функций и применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sin(x-1))'}{\left(ctg\frac{\pi x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2}=-\frac{2}{\pi}.$$

Если имеется неопределенность вида 0^0 или ∞^0, при вычислении предела функции $f(x)^{g(x)}$, то логарифм этой функции представляет собой неопределенность вида $0\cdot\infty$. При этом используется соотношение

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)}.$$

***Пример* 4.11.** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида ∞^0. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}=e^0=1$.

Задачи

4.16. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctg\,x}{x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-tg\,x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln^3 x$;

7) $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{2x^2-x^3+3x^4}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1+}\ln x\cdot\ln(x-1)$;

9) $\lim\limits_{x\to 0+}x^{\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0+}(\arcsin x)^{tg\,x}$;

11) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x^{\ln(e^x-1)}}$;

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

16) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^4+7x^3+6x^2-32x-32}{x^3+11x^2+40x+48}$.

4.7. Возрастание и убывание функции. Экстремумы

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a,b), *возрастает* (*убывает*), если для любых $x_1,\ x_2\in(a,b)$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)>f(x_2)$). Таким образом, функция возрастает (убывает), если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Для того, чтобы дифференцируемая функция $y=f(x)$ была возрастающей (убывающей) на интервале (a,b), достаточно, чтобы во всех точках (a,b) выполнялось неравенство $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$).

***Пример* 4.12.** Исследовать на возрастание и убывание функцию $y=x^2e^{-x}$.

Решение: Имеем $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$. Поскольку $e^{-x} > 0$ для всех x, то знак производной y' определяется только первым множителем.

Приравняем производную к нулю и найдем ее корни: $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Полученные корни разбивают ось Ox на три интервала, в каждом из которых производная сохраняет неизменный знак. Распределение знаков y' показано на рисунке.

Поэтому данная функция убывает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$ и возрастает на интервале $(0, 2)$.

Точку x_0 называют точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой для всех x выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$).

Точки локального максимума и локального минимума называют *точками экстремума*.

Необходимый признак экстремума. Пусть $x = x_0$ – точка экстремума функции $y = f(x)$, дифференцируемой в некоторой окрестности точки x_0, тогда $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная обращается в ноль или не существует, называют *критическими точками функции.*

Первый достаточный признак экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, в которой функция определена и непрерывна. Если $f'(x)$ меняет свой знак при переходе через точку x_0 с плюса на минус (с минуса на плюс), то $x = x_0$ – точка локального максимума (минимума) функции $f(x)$.

***Пример* 4.13.** Исследовать на экстремум функцию $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$.

Решение: Найдем производную данной функции

$$y' = \sqrt[3]{x} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Приравняем числитель и знаменатель к нулю, найдем критические точки функции: $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$. Распределение знаков производной показано на рисунке.

Поэтому $x_1 = 1$ является точкой минимума, а $x_2 = 0$ не является экстремумом.

Второй достаточный признак экстремума. Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$, то x_0 является точкой локального минимума функции. Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$, то x_0 является точкой локального максимума функции.

Задачи

4.17. Исследовать следующие функции на возрастание и убывание и найти их экстремумы:

1) $y = x^2 - 6x + 5$;

2) $y = -x^2 + 4x + 1$;

3) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$;

4) $y = 4x^3 - x^4$;

5) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$;

6) $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-8)^2}$;

7) $y = x\sqrt{4 - x^2}$;

8) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$;

9) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$;

10) $y = \ln\sqrt{1 + x^2}$;

11) $y = x\ln x$;

12) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

13) $y = x + \cos x$;

14) $y = x^2 - x - 2arctg\, x$.

4.18. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на указанных отрезках:

1) $y = -3x^4 + 6x^2,\ -2 \le x \le 2$;

2) $y = x + 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$;

3) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ 0 \le x \le 4$;

4) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2},\ 0 \le x \le 1$;

5) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1},\ 0 \le x \le 1$;

6) $y = arctg\dfrac{1-x}{1+x},\ 0 \le x \le 1.$

4.8. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Функцию $y = f(x)$ называют *выпуклой* на промежутке X, если для любых точек $a, b \in X$ и для любого $\alpha \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \le \alpha\, f(a) + (1-\alpha)\, f(b).$$

Геометрический смысл данного неравенства состоит в том, что любая точка $(c,\ f(c))$, где $c \in (a, b)$ графика функции $f(x)$ лежит не выше соответствующей точки отрезка, соединяющего точки $(a,\ f(a))$ и $(b,\ f(b))$.

Функцию $y = f(x)$ называют *вогнутой* на промежутке X, если для любых точек $a, b \in X$ и для любого $\alpha \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \ge \alpha\, f(a) + (1-\alpha)\, f(b).$$

Точку $(x_0, f(x_0))$ называют *точкой перегиба* функции $y = f(x)$, если в этой точке выпуклость меняется на вогнутость или наоборот.

Функция $y = f(x)$, дважды дифференцируемая на промежутке X, выпуклая (вогнутая) на этом промежутке тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) в каждой точке $x \in X$.

***Пример* 4.14.** Исследовать на выпуклость функцию $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение: Находим последовательно первую и вторую производные данной функции

$$y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$y'' = -\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \left(x^2 - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Поскольку знак второй производной определяется только первым множителем, то распределение знаков будет таким, как показано на рисунке.

Поэтому функция является выпуклой на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ и вогнутой на интервале $(-1, 1)$.

Точки $x = -1$ и $x = 1$ являются точками перегиба.

Задачи

4.19. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба:

1) $y = x^7 + 7x + 1$;
2) $y = x^4 + 6x^2$;
3) $y = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 3x + 1$;
4) $y = x + \cos x$;
5) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} + 2x$;
6) $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

4.9. Асимптоты

Прямая l называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

Прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x)$ равен $\pm\infty$.

Прямая $x = x_0$ может быть вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ в том случае, если x_0 – точка разрыва или граничная точка области определения.

Прямая $y=b$ является *горизонтальной асимптотой*, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$, то прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$.

***Пример* 4.15.** Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Решение: Так как функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=1$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке.

Имеем $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$, следовательно, прямая $x=1$ – вертикальная асимптота.

Найдем горизонтальные асимптоты графика функции. Получаем предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty$. Отсюда вытекает, что горизонтальных асимптот нет.

Проверим наличие наклонных асимптот. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x(x-1)}=1=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-1\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0=b$, то прямая $y=x$ является наклонной асимптотой.

Задачи

4.20. Найти асимптоты графиков функций:

1) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x}{x-2}}$;

2) $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$;

4) $y=3x+arctg5x$;

5) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}+x$;

6) $y=\dfrac{\sin x}{x}$;

7) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$;

8) $y=e^{\frac{1}{x-1}}$.

4.10. Исследование функций. Построение графиков

Рекомендуется следующая схема исследования функций:

1) найти область определения функции;
2) найти нули функции и точки пересечения с осью ординат;
3) найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума;
4) найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба;
5) найти асимптоты;

6) построить график, используя результаты исследования.

***Пример* 4.16.** Исследовать функцию и построить ее график: $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

Решение:

1) Функция определена всюду, кроме точки $x = 0$.

2) Нули функции: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{1-x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$. Следовательно, график функции пересекает ось $0x$ в точке (1; 0) и не пересекает ось $0y$ $(x \neq 0)$. Нетрудно убедиться, что при $x < 0$ значение функции $y > 0$, при $0 < x < 1$ значение функции $y > 0$, при $x > 1$ имеем $y < 0$.

3) Найдем производную: $y' = -\dfrac{2}{x^3} - 1$, приравнивая ее нулю, найдем критическую точку $x = -\sqrt[3]{2}$. Производная не существует при $x = 0$, но эта точка не принадлежит области определения, поэтому критической не является.

Нанесем критическую точку и точку $x = 0$ на числовую прямую, расставив знаки производной на получившихся интервалах.

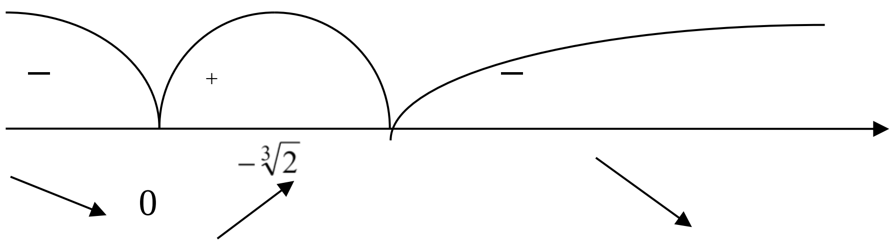


Рис. 4.2.

Из рис. 4.2 видно, что функция убывает при $x < -\sqrt[3]{2}$ и $x > 0$, а возрастает при $-\sqrt[3]{2} < x < 0$, в точке $x = -\sqrt[3]{2}$ функция имеет локальный минимум, $y_{\min} = y\left(-\sqrt[3]{2}\right) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

4) Найдем вторую производную: $y'' = \dfrac{6}{x^2}$, $y'' \neq 0$ и не определена в точке $x = 0$, не принадлежащей области определения. Следовательно, точек перегиба функция не имеет (не выполнено необходимое условие их существования). Во всей области определения вторая производная положительна, функция является всюду выпуклой.

5) В рассматриваемом примере существует вертикальная асимптота $x = 0$, так как функция имеет одну точку разрыва $x = 0$. Подсчитаем в ней пределы слева и справа: $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1-x^3}{x^2} = +\infty$, поскольку предел числителя равен 1, а знаменатель является бесконечно малым при $x \to \pm 0$.

Проверим условия существования наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{x^3}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^3}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

аналогично находятся $k=1$ и $b=0$ и при $x\to+\infty$. Следовательно, функция имеет наклонную асимптоту $y=-x$ при $x\to\pm\infty$.

6) Учитывая результаты исследования, строим график (см. рис. 4.3.).

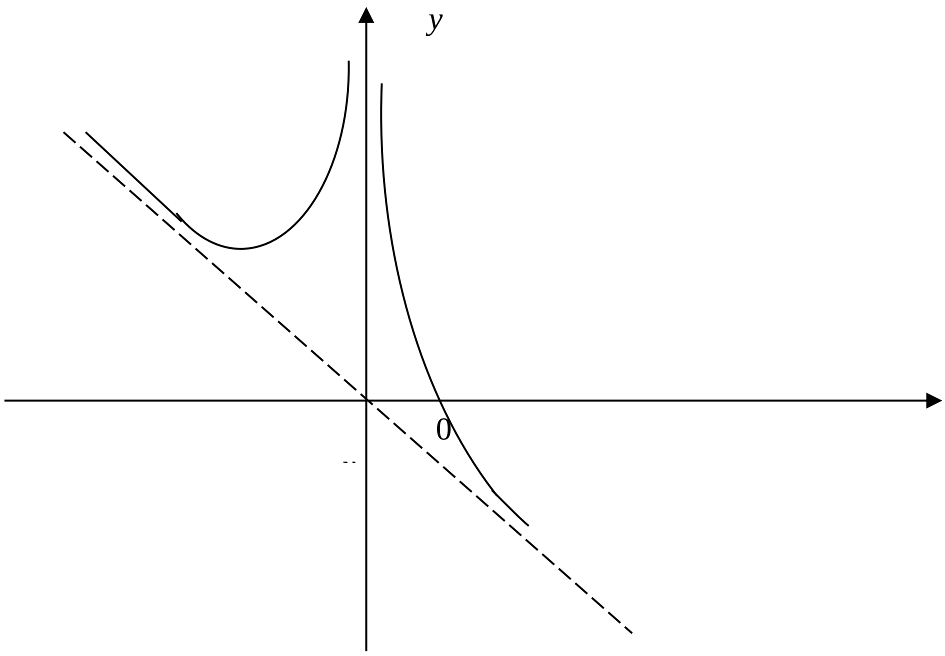


Рис. 4.3. График функции

Глава 5. Интегральное исчисление функции одной переменной

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функцию $F(x),\ x\in X$, называют *первообразной* функции $f(x)$ на множестве X, если $F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in X$. Если $F(x)-$ первообразная функции $f(x)\ \ x\in X$, то функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x)=F(x)+C$, где $C-$ некоторая постоянная.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ называют *неопределенным интегралом* и обозначают $\int f(x)\cdot dx$. По определению $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F(x)-$ одна из первообразных функции $f(x)$, $C-$ произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)\cdot dx\right)'=f(x)$.

2. $d\left(\int f(x)\cdot dx\right)=f(x)dx$.

3. $\int dF(x)=F(x)+C$.

4. $\int \alpha\cdot f(x)dx=\alpha\cdot\int f(x)dx\ (\alpha=const,\alpha\neq 0)$.

5. $\int (f(x)\pm g(x))\cdot dx=\int f(x)\cdot dx\pm\int g(x)\cdot dx$.

6. Если $\int f(x)\cdot dx=F(x)+C$ и $u(x)-$ любая дифференцируемая функция, то $\int f(u(x))\cdot du(x)=F(u(x))+C$.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0\cdot dx=C$.

2. $\int 1\cdot dx=x+C$.

3. $\int x^{\alpha}\,dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ \ (\alpha=const,\alpha\neq-1)$.

4. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

5. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C\ (0<a,\ a\neq 1)$, $\int e^{x}dx=e^{x}+C$.

6. $\int \sin x dx=-\cos x+C$.

7. $\int \cos x dx=\sin x+C$.

8. $\int\dfrac{dx}{\cos^{2}x}=tgx+C$.

9. $\int\dfrac{dx}{\sin^{2}x}=-ctgx+C$.

10. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C.\end{cases}$

11. $\int\dfrac{dx}{1+x^{2}}=\begin{cases}arctgx+C,\\ -arcctgx+C.\end{cases}$

12. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm 1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm 1}\right|+C$.

13. $\int\dfrac{dx}{1-x^{2}}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$.

В силу свойства 6 таблицу интегралов можно расширить, заменив в приведенных выше формулах независимую переменную x на переменную интегрирования $u = u(x)$ (тогда во всех формулах dx заменится на $du = u'(x)dx$).

5.2. Метод непосредственного интегрирования

***Пример* 5.1.** Используя тождественные преобразования подынтегральных выражений и свойства неопределенных интегралов, свести к табличным и вычислить следующие интегралы:

1) $\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x}\right)\cdot dx$; 2) $\int\left(3 - x^2\right)^3 dx$; 3) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$; 5) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$; 6) $\int 2^x\cdot 3^{2x}dx$;

7) $\int 2^x\left(1 + 3x^2\cdot 2^{-x}\right)dx$.

Решение:

1) Используя свойства 4, 5 получим:

$$\int\left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x}\right)dx = 5\int\cos x dx + 2\int dx - 3\int x^2 dx + \int\frac{1}{x}dx =$$

$$= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| + C.$$

$$2)\int\left(3 - x^2\right)^3 dx = \int\left(27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6\right)dx = 27\int dx + 27\int x^2 dx +$$

$$+ 9\int x^4 dx - \int x^6 dx = 27x - \frac{27}{3}x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

3) Разделим числитель подынтегральной функции почленно на знаменатель, тогда

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C.$$

4) Заменим единицу в числителе подынтегральной функции на тригонометрическую, получим

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx + \int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx =$$

$$= \int\frac{1}{\cos^2 x}dx + \int\frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + tgx + C.$$

5) В числителе добавим и отнимем единицу, затем разобьем дробь на сумму двух дробей:

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1}{1+x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{1+x^2}dx+arctgx+$$

$$+C=\int\left(x^2-1\right)dx+arctgx+C=\frac{x^3}{3}+xarctgx+C.$$

6) Воспользуемся свойством степеней:

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}dx=\int 2^x\cdot 9^x dx=\int 18^x dx=\frac{18^x}{\ln 18}+C\,.$$

7) Раскроем скобки и упростим выражение:

$$\int 2^x(1+3x^2\cdot 2^{-x})dx=\int\left(2^x+3x^2\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}+C\,.$$

Задачи

5.1. В следующих равенствах заполнить пропущенные места:

1) $d(\;)=2xdx$;

2) $d(\;)=x^3dx$;

3) $d(\;)=\cos xdx$;

4) $d(\;)=\dfrac{dx}{x}$.

5.2. Найти интегралы:

1) $\int\left(x^2+2x+\dfrac{1}{x}\right)dx$;

2) $\int\dfrac{10x^8+3}{x^4}dx$;

3) $\int\dfrac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$;

4) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

5) $\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

6) $\int e^x\left(1-\dfrac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$;

7) $\int a^x\left(1+\dfrac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$;

8) $\int\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

9) $\int ctg^2 xdx$;

10) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

11) $\int\dfrac{3-2\,ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$;

12) $\int\sin^2\dfrac{x}{2}dx$;

13) $\int\left(\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

14) $\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)dx$.

5.3. Понятие и основные свойства определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разделим отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. На каждом из получившихся отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ длины $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,..., n$. Построим для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ *интегральную сумму* $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_i$ и положим $\lambda = \max\limits_{i=1,...,n} \Delta_i$.

Если существует предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек ξ_i, то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_i,$$

функцию $f(x)$ в этом случае называют интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

1. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

2. Если функция интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Геометрический смысл определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Если $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен *площади криволинейной трапеции*, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой $y = f(x)$, см. рис. 5.1.

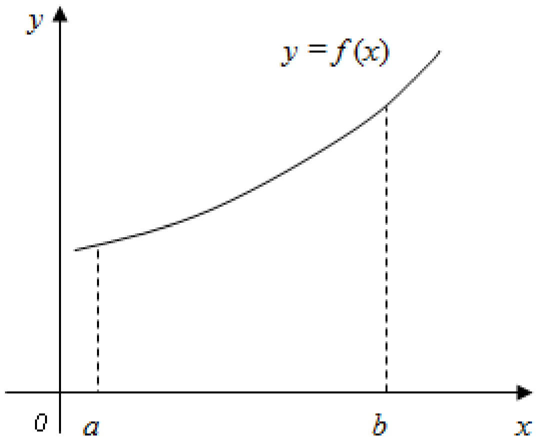


Рис. 5.1. Геометрический смысл определенного интеграла

Основные свойства определенного интеграла

1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, k – произвольное число, то $k \cdot f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то $f(x)\pm g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx \pm \int_a^b g(x)\cdot dx.$$

3. $\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$.

4. $\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6. Если $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\cdot dx \geq 0$.

7. Если $f(x)\geq g(x)\ \ \ \forall x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\cdot dx \geq \int_a^b g(x)\cdot dx$.

8. Если $f(x)\geq g(x)\ \forall x\in[a,b]$и существует точка $x_0\in[a,b]$, в которой $f(x_0)>g(x_0)$, причем обе функции f и g непрерывны в этой точке, то $\int_a^b f(x)dx >$ $\int_a^b g(x)dx$.

Свойства 4-8 формулируются в предположении, что все используемые в них интегралы существуют.

9. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $m-$ наименьшее, M – наибольшее значение $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$m\cdot(b-a)\leq \int_a^b f(x)\cdot dx \leq M\cdot(b-a).$$

10. (*Теорема о среднем.)* Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $c\in[a,b]$ такая, что справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

при этом $f(c)$ называют средним значением функции на отрезке $[a,b]$.

Вычисление определенного интеграла

1. *Формула Ньютона-Лейбница*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)-$ ее первообразная, то верна формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

***Пример* 5.2.** Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{5x^4 - 3x}{x}dx$.

Решение: Найдем область определения функции, чтобы убедиться, что она определена на отрезке $[1;3]$: $D(f): x \neq 0, 0 \notin [1;3]$.

$$\int_1^3 \frac{5x^4 - 3x}{x}dx = \int_1^3 \left(\frac{5x^4}{x} - \frac{3x}{x}\right)dx = \int_1^3 \left(5x^3 - 3\right)dx = \left(\frac{5x^4}{4} - 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{5 \cdot 3^4}{4} - 9 - \left(\frac{5 \cdot 1^4}{4} - 3\right) = \frac{405}{4} - 9 - \frac{5}{4} + 3 = 100 - 6 = 94.$$

Задачи

5.3. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_0^2 (3x^2 - 1)dx$; 2) $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$; 3) $\int_0^1 x^2 dx$; 4) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

5) $\int_0^1 x^5(1-x)dx$; 6) $\int_0^1 (x+7)^2 dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$; 8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$; 10) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$; 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$;

13) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$; 14) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; 15) $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4})dx$; 16) $\int_0^2 (3-x)dx$;

17) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$; 18) $\int_1^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$; 19) $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$; 20) $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$;

21) $\int_0^1 \frac{1}{2+x}dx$; 22) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$; 23) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; 24) $\int_0^2 x(3-x)dx$;

25) $\int_1^2 e^x dx$; 26) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

5.4. Вычисление площадей плоских фигур

Вычисление площади любой плоской фигуры следует свести к вычислению суммы или разности площадей криволинейных трапеций и далее воспользоваться геометрическим смыслом определенного интеграла: пусть на плоскости XOY задана фигура, ограниченная отрезком $[a;b]$ оси OX, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на $[a;b]$ (рис. 5.2).

Если фигура ограничена сверху и снизу двумя графиками функций $y_1 = = f_1(x)$ $y_2 = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, $a \le x \le b$ (рис. 5.2), где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные и неотрицательные на $[a;b]$ функции, тогда площадь данной фигуры равны разности площадей криволинейных трапеций, ограниченных сверху соответственно графиками функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью OX. Следовательно, площадь S данной фигуры равна

$$\boldsymbol{S} = \int_{a}^{b} \boldsymbol{f_2}(\mathrm{x})\boldsymbol{dx} - \int_{a}^{b} \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \int_{a}^{b} \big(\boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})\big)\boldsymbol{dx}. \qquad (5.1)$$

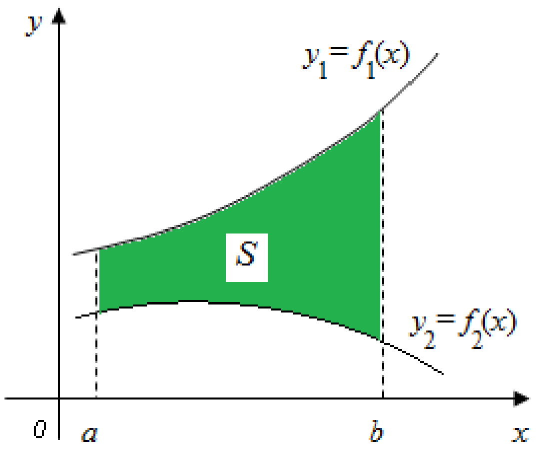


Рис. 5.2. Геометрический смысл определенного интеграла

***Пример* 5.3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$5x - 3y + 15 = 0$ и $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение: Найдем точки пересечения прямой и параболы, решив систему:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 15 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}.$$

Получаем 2 точки: (0; 3) и (5; 8), абсциссы точек будут верхним и нижним пределами интегрирования $a = 0$, $b = 5$ (рис. 5.3).

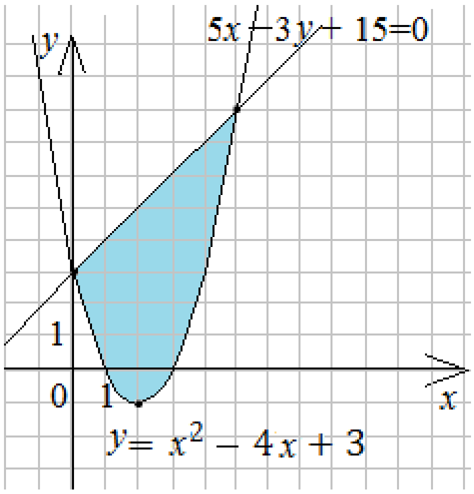


Рис. 5.3 Иллюстрация решения примера

Вычислим площадь закрашенной фигуры:

$$S=\int_a^b (y_1-y_2)dx=\int_0^5\left(\frac{5}{3}x+5-(x^2-4x+3)\right)dx=\int_0^5\left(\frac{17}{3}x+2-x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{17}{3\cdot 2}x^2+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5=\frac{17}{6}5^2+10-\frac{5^3}{3}-0=\frac{425+60-250}{6}=\frac{235}{6}=39\frac{1}{6}\text{ (кв. ед.).}$$

Задачи

5.4. Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

1) $y=3+2x-x^2, y=x+1$;

2) $y=\sin x, y=\dfrac{x^2}{4}, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$;

3) $y=3+2x+x^2, y=3x+5$;

4) $y=5-2x-x^2, y=3-3x$;

5) $y=x^2+2, xy=3, \ y=1, \quad x=0$;

6) $y=1+x^2, x=y^2+1, y=0, 0\le x\le 2$;

7) $y=2-x^4, y=x^2$;

8) $y=x^2+3x-4, 0\le x\le 6$;

9) $y=x^2, y=\dfrac{x^2}{2}, \ y=2x$;

10) $y=x^4, y=x^2$;

11) $y=\dfrac{1}{1+x^2}, \ y=\dfrac{x^2}{2}$;

12) $y=\pm\sqrt{x}, x=\pm\sqrt{y}$;

13) $y=e^x, \ y=e^{-x}, x=1$.

14) $y=\sin x, \ 0\le x\le\pi, y=0$;

15) $y=2^{-x}, \ y=\log_2 x, \ 2\le x\le 4$;

16) $y=4-x^2, \ \ y=0$,

17) $y=e^x, \ y=1+x+\dfrac{x^2}{2}, \ 0\le x\le 1$;

18) $y=x^2, \ \ y=1$;

19) $y=\sqrt{x+1}, \ y=1+0{,}5x-0{,}125x^2, \ 0\le x\le 1$;

20) $y = \ln x, \quad y = e, y = 0;$

21) $y = \sqrt{x}, \quad y = x;$

22) $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, x = 3;$

23) $y = tgx, \quad x = 0, x = \frac{\pi}{3};$

24) $y = x^3, \quad x = 0, x = 2;$

25) $y = \sin x, \quad y = x^2 - \pi x;$

26) $y = 1 - x^2, \quad x = 0, y = 0;$

27) $y = e^x, \quad y = 0, x = 0, x = 1;$

28) $y = 4x - x^2, \quad y = x;$

29) $y = \sqrt{x}, \quad y = x;$

30) $y = x^2, \quad y = 1, x = 0;$

31) $y = x^3, \quad y = x^2.$

Глава 6. Функции нескольких переменных

Пусть имеется *n* переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1,...,x_n)$ из некоторого множества *X* соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1,...,x_n)$.

Переменные $(x_1,...,x_n)$ называются *независимыми переменными*, или *аргументами*, z – *зависимой переменной*, или *функцией*, символ f означает *закон соответствия.* Множество *X* называется *областью определения функции* f и является подмножеством *n*-мерного пространства.

Рассмотрим некоторые примеры функций нескольких переменных.

1. Функция $z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b$, где $a_1,...,a_n,b$ – постоянные числа, называется *линейной функцией.* Данную функцию можно рассматривать как сумму *n* линейных функций от переменных $x_1,...,x_n$.

2. Функция $z = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1} b_{ij}x_ix_j$ (b_{ij} – постоянные числа) называется *квадратической функцией.* Эта функция не раскладывается на сумму линейных слагаемых.

Функцию двух переменных будем обозначать $z = f(x, y)$. Тогда ее область определения *X* есть подмножество координатной плоскости Oxy.

Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0) \in X$ называется круг, содержащий эту точку. Очевидно, что круг на плоскости есть двумерный аналог интервала на прямой.

Любой функции $z = f(x, y)$ можно поставить в соответствие две функции одной переменной: при фиксированном значении $x = x_0$ функцию $z = f(x_0, y)$ и при фиксированном значении $y = y_0$ функцию $z = f(x, y_0)$. Поэтому исследование функции нескольких переменных очень похоже на исследование функции одной переменной.

Следует иметь в виду, что хотя функции $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$ имеют одно и то же «происхождение», их вид может существенно отличаться. Например, функция $z = S_0\left(1 + \frac{x}{100}\right)^y$, которая выражает величину вклада через y лет при ставке x%. Эта функция является степенной по x и показательной по y.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (X, Y, Z), аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой x функциональным соотношением $z = f(x, y)$. Этот график представляет собой некоторую *поверхность* в трехмерном пространстве.

Для построения графика функции $z = f(x, y)$ полезно рассматривать функции одной переменной $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$, представляющие собой *сечения поверхности* $z = f(x, y)$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz, т.е. плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, в которых значение функции одно и то же и равно постоянной величине *C*. Число *C* в этом случае называется *уровнем.*

***Пример* 6.1.** Построить график функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Решение: Сечения поверхности $z = x^2 + y^2 - 2y$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям *Oyz* и *Oxz*, представляют собой параболы: при $x = 0$, $z = (y-1)^2 - 1$, при $y = 1$, $z = x^2 - 1$ и т.д. В сечении поверхности координатной плоскостью *Oxy*, т.е. плоскостью $z = 0$, получается окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$. График функции z представляет поверхность, называемую *параболоидом* (рис. 6.1) $z = x^2 - 1$

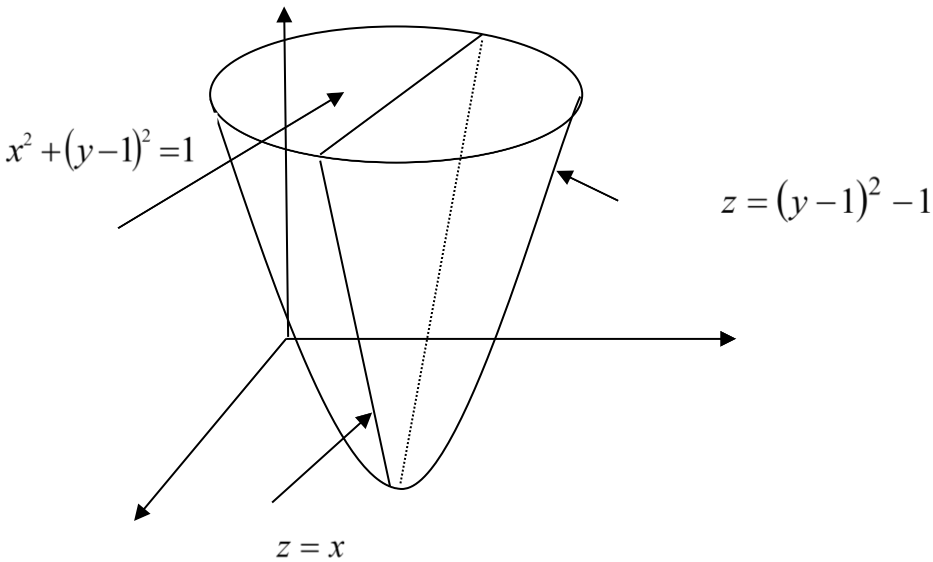


Рис. 6.1. Иллюстрация решения примера

***Пример* 6.2.** Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Решение: Линия уровня $z = C -$ это кривая на плоскости *Oxy*, задаваемая уравнением $x^2 + y^2 - 2y = C$ или $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$, т.е. уравнением окружности с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $\sqrt{C+1}$ (рис. 6.2)

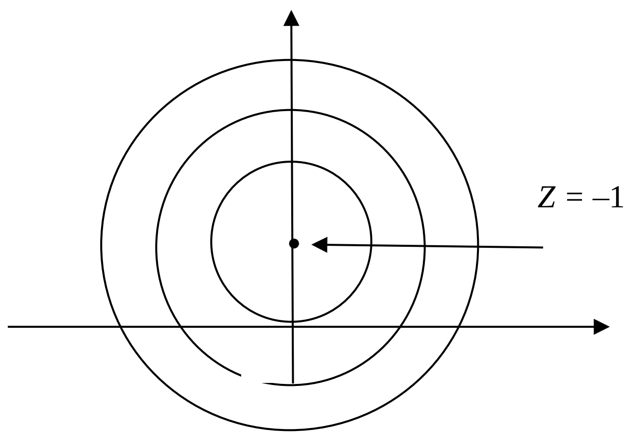


Рис. 6.2. Иллюстрация решения примера

Точка $(0;1)$ – это вырожденная линия уровня, которая соответствует минимальному значению функции $z=-1$, достигаемому в точке $(0;1)$. Линии уровня – концентрические окружности, радиус которых увеличивается с ростом $z=C$, причем расстояния между линиями с одинаковым шагом уровня уменьшаются по мере удаления от центра.

6.1. Дифференцируемость функций нескольких переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена на некотором множестве $X\subset R^n$.

Зададим аргументу x приращение Δx, аргументу y – приращение Δy. Тогда функция z получит наращенное значение $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Величина $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ называется *полным приращением функции* в точке (x,y).

Если задать только приращение аргумента x или только приращение аргумента y, то полученные, соответственно, приращения функции

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \text{ и } \Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

называются *частными приращениями.*

Полное приращение функции, в общем случае, не совпадает с суммой частных: $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Обозначается частная производная следующим образом: z'_x, z'_y или $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$.

Таким образом, для функции $z=f(x,y)$ по определению

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Из определения частных производных следует, что для нахождения производной $f'_x(x,y)$ надо считать постоянной переменную y, а для нахождения $f'_y(x,y)$ – постоянной переменную x. При этом все правила дифференцирования и таблица производных сохраняется, как и для функции одной переменной.

***Пример* 6.3.** Найти частные производные от следующих функций:

$$1)\ z = x\ln y + \frac{y}{x}; \qquad 2)\ z = x^y.$$

Решение:

1. Чтобы найти частную производную по x, считаем y постоянной величиной:

$$z'_x=\left(x\ln y+\frac{y}{x}\right)'_x=\ln y+y\left(\frac{1}{x}\right)'=\ln y-\frac{y}{x^2}.$$

Аналогично, дифференцируя по y, считаем x постоянной величиной:

$$z'_y=\left(x\ln y+\frac{y}{x}\right)'_y=x(\ln y)'+\frac{1}{x}\cdot y'=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}.$$

2. При фиксированном y имеем степенную функцию от x. Таким образом, $z'_x=yx^{y-1}$. При фиксированном x функция является показательной относительно y и $z'_y=x^y\ln x$.

Задачи

6.1. Найти частные производные функций:

1) $z=\ln(x^2+y^2)$

2) $z=\ln tg(y/x)$

3) $z=\sin(x^2+y^2)$

4) $z=x^y$

5) $z=e^x(x\sin y+\cos y^2)$

6) $z=arctg\dfrac{2(x+\sin y)}{4-x\sin y}$.

6.2. Показать, что функция $z=ye^{x^2-y^2}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

6.3. Показать, что функция $z=\dfrac{x^2}{2y}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ удовлетворяет уравнению $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3}{y}$.

6.2. Дифференциал функции нескольких переменных

Дифференциалом функции нескольких переменных $z=f(x,y)$ называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y.$$

Если $\Delta x=dx,\ \Delta y=dy$, то $dz=z'_xdx+z'_ydy$.

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y), если ее полное приращение Δz может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где dz – дифференциал функции, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Таким образом, дифференциал функции нескольких переменных представляет *главную, линейную относительно приращений* Δx *и* Δy, часть полного приращения функции.

Если частные производные функции $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ существуют в окрестности точки (x, y) и непрерывны в самой точке (x, y), то функция $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке* (достаточное условие дифференцируемости).

6.3. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, а l – некоторое направление, задаваемое единичным вектором

$$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta), \text{ где } \vec{e} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – косинусы углов, образуемых вектором $\vec{e}$ с осями координат и называемые *направляющими косинусами* (рис. 6.3).

При перемещении в данном направлении l точки $M(x, y)$ в точку $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ функция z получает приращение

$$\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

называемое *приращением функции* z *в данном направлении* l.

Производной z'_l *по направлению* l функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последней к нулю:

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

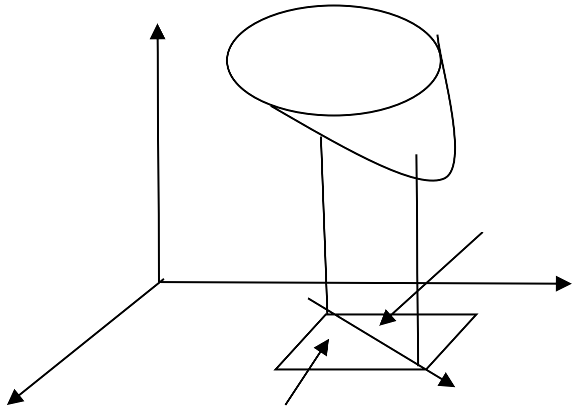


Рис. 6.3. Направляющие косинусы

Производная z'_l характеризует *скорость изменения функции в направлении* l.

Очевидно, что частные производные z'_x и z'_y представляют производные по направлениям, параллельным соответственно осям Ox и Oy. Поэтому:

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta.$$

Градиентом ∇z *функции* $z = f(x, y)$ называется вектор с координатами (z'_x, z'_y).

Градиент функции ∇z в данной точке характеризует *направление максимальной скорости изменения* функции в этой точке. Зная градиент функции в каждой точке, можно локально строить линии уровня функции.

Если функция дифференцируема и в точке величина градиента отлична от нуля, то *градиент перпендикулярен линии уровня*, проходящей через данную точку.

В случае если $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и существуют частные производные $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$, непрерывные в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Тогда градиент функции $f(x)$ в точке x имеет вид:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right).$$

Вектор $-\nabla f(x)$ есть антиградиент функции $f(x)$ в точке x.

Сформулируем основное свойство градиента (антиградиента) при условии $\nabla f(x) \neq 0$:

1. *Вектор* $\nabla f(x)$ *(градиент) есть направление возрастания функции* $f(x)$ *в точке* x.

2. *Вектор* $-\nabla f(x)$ *(антиградиент) есть направление убывания функции* $f(x)$ *в точке* x.

***Пример* 6.4.** Найти производную функции $z = 3y\ln x$ в точке $(2; 0)$ по направлению, параллельному биссектрисе первого координатного угла.

Решение: Прямая, проходящая через точку $(2; 0)$ параллельна биссектрисе первого координатного угла, задается уравнением $y = x - 2$. Ее углы с осями координат (как у биссектрисы) равны $\dfrac{\pi}{4}$. Поэтому производная по заданному направлению будет иметь вид:

$$z'_l = z'_x \cos\frac{\pi}{4} + z'_y \cos\frac{\pi}{4} = \left((3y\ln x)'_x + (3y\ln x)'_y\right)\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$z'_l = \left(\frac{3y}{x} + 3\ln x\right)\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z'_l(2; 0) = \frac{3}{\sqrt{2}}\ln 2.$$

***Пример* 6.5.** Найти градиент функции $f(x)=x_1^2+x_2^2+3x_1+4x_2$ в точке $x^0=(1,1)$.

Решение: Найдем частные производные функции $f(x)$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=2x_1+3, \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}=2x_2+4.$$

Вычислим значение производных в точке x^0

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right|_{x=x^0}=5, \qquad \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right|_{x=x^0}=6.$$

Следовательно, градиент функции в точке $x^0=(1,1)$ имеет вид

$$\nabla f(x^0)=(5,\ 6).$$

Задачи

6.4. Найти градиент функции $z=y^2-2y-2x-1$ в точке $M(2,3)$.

6.5. Найти градиент функции $z=\sqrt{y^2-x^2}$ в точке $M(4,5)$.

6.6. Найти градиент функции $z=\sqrt{x+y^2-5}$ в точке $M(5,2)$.

6.7. Найти градиент функции $z=\sqrt{y(x+2)}$ в точке $M(7,4)$.

6.8. Найти градиент функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{x-3y+1}}$ в точке $M(5,-1)$.

6.9. Найти градиент функции $z=2x^2+3y^2-5$ в точке $M(-1,2)$.

6.10. Найти градиент функции $z=-y^2+3x^2-2$ в точке $M(-2,3)$.

6.11. Найти градиент функции $z=x^2-4x+y^2+2$ в точке $M(1,3)$.

6.12. Найти градиент функции $z=4x^2+9y^2-36$ в точке $M(-2,1)$.

6.13. Найти градиент функции $z=\sqrt{x(y-1)}$ в точке $M(4,5)$.

6.14. Найти градиент функции $z=(x-y)^2$ в точке $M(0,3)$.

6.15. Найти градиент функции $z=4-x^2-y^2$ в точке $M(1,2)$.

6.16. Найти градиент функции $z=\sqrt{y^2-x^2}$ в точке $M(4,5)$.

6.17. Найти градиент функции $z=\sqrt{x+y^2-5}$ в точке $M(5,2)$.

6.18. Найти градиент функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{x-3y+1}}$ в точке $M(1,-1)$.

6.19. Найти градиент функции $z = 2x^2 + 3y^2 - 5$ в точке $M(1,2)$.

6.20. Найти градиент функции $z = \sqrt{x(y-1)}$ в точке $M(3,5)$.

6.4. Экстремум функции нескольких переменных

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ непрерывно-дифференцируемая функция на множестве $X \subset R^n$.

Точка $M_0(x_0, y_0) \in X$ называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*) функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек $(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0; y_0) \geq f(x; y) \quad (f(x_0; y_0) \leq f(x; y)).$$

Необходимое условие локального экстремума:

Пусть точка $(x_0; y_0)$ есть точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$. Тогда частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ в этой точке равны нулю.

Точки, в которых выполняется необходимое условие локального экстремума, называются *критическими* или *стационарными*.

Если частные производные $z'_x = f'_x(x, y)$ и $z'_y = f'_y(x, y)$ сами являются дифференцируемыми функциями, то от этих функций можно вычислить частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*.

Вычислив частные производные от функции $z'_x = f'_x(x, y)$, получим вторые частные производные $z''_{xx} = (z'_x)'_x$, $z''_{yx} = (z'_y)'_x$; аналогично для функции $z'_y = f'_y(x, y)$ можно найти ее частные производные $z''_{yy} = (z'_y)'_y$, $z''_{xy} = (z'_x)'_y$. Если частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$, то в этой точке $z''_{xy}(x_0; y_0) = z''_{yx}(x_0; y_0)$.

Достаточное условие локального экстремума:

Пусть функция $z = f(x, y)$:

а) определена в некоторой окрестности критической точки $(x_0; y_0)$, в которой $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$;

б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$; $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B$; $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$.

Тогда если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке $(x_0; y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет *локальный экстремум*, причем если $A < 0$ – локальный *максимум*, если $A > 0$ –

локальный *минимум*. При $\Delta = AC - B^2 < 0$ функция $z = f(x, y)$ экстремума не имеет. Если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Исследование функции двух переменных на экстремум рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти частные производные функции z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$; найти критические точки.

3. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4. Найти экстремумы функции.

***Пример* 6.6.** Найти вторые частные производные функции

$$f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1 - x_2 .$$

Решение: Подсчитаем первые частные производные по переменным x_1, x_2

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 8x_1 - x_2 + 2, \qquad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 6x_2 - x_1 - 1.$$

С учетом этого

$$\nabla f(x) = (8x_1 - x_2 + 2,\, 6x_2 - x_1 - 1) .$$

Подсчитаем вторые частные производные функции $f(x)$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = 8, \qquad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} = -1, \qquad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 6.$$

***Пример* 6.7.** Найти экстремумы функции

$$z = \frac{2(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{2x + 2y + 2x^2y + 2y^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2} .$$

Решение: Используем схему исследования на экстремум функции двух переменных:

1) Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \frac{(2+4xy)(1+x^2)(1+y^2) - 2(x+y)(1+xy)(2x+2xy^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2};$$

$$z'_y = \frac{(2+2x^2+4y)(1+x^2)(1+y^2) - 2(x+y)(1+xy)(2y+2yx^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}$$

2) Критические точки функции найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0, \\ \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = 0, \end{cases}$$

имеющей четыре решения $(1;1)$, $(1;\ -1)$, $(-1;1)$ и $(-1;-1)$.

3) Вычислим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right)'_x = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^2};\ z''_{yy} = \left(\frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\right)'_y = \frac{4y(y^2-3)}{(1+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 0;$$

вычисляем их значения в каждой критической точке и проверяем в ней достаточное условие экстремума.

В точке $(1;1)$ $A = z''_{xx}(1;1) = -1$, $B = 0$, $C = z''_{yy}(1;1) = -1$.

Так как $\Delta = AC - B^2 = 1 > 0$ и $A = -1 < 0$, то точка $(1;1)$ есть точка максимума.

Аналогично устанавливаем, что $(-1;-1)$ – точка минимума, а в точках $(1;\ -1)$ и $(-1;1)$, в которых $\Delta = AC - B^2 < 0$ – экстремума нет.

4) Найдем экстремумы функции:

$$z_{\max} = z(1;1) = 2,\ z_{\min} = z(-1;-1) = -2.$$

Задачи

6.21. Найти частные производные 2-го порядков функций:

1) $z = \ln(x^2 + y^2)$

2) $z = \ln tg(y/x)$

3) $z = \sin(x^2 + y^2)$

4) $z = x^y$

5) $z = e^x(x\sin y + \cos y^2)$

6) $z = arctg\,\dfrac{2(x+\sin y)}{4 - x\sin y}$.

6.22. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^2 + 5y^2 - x + 2y$

2) $z = 3x^2 - xy + 4x - 6$

3) $z = 3x^2 + 2y^2 - 5xy + 1$

4) $z = x^2 - 3y^2 - 3xy$

5) $z = xy + x - y$

6) $z = x^2 + 5y^2 - x - y$

6.23. Показать, что функция $z=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/(4a^2y)}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial y}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6.24. Показать, что функция $z=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$ удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

6.25. Показать, что функция $z=\ln(x+e^{-y})$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

6.26. Показать, что функция $z=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

6.27. Показать, что функция $z=\frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

6.28. Показать, что функция $z=e^{xy}$ удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$.

6.29. Показать, что функция $z=x^y$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

6.30. Показать, что функция $z=xe^{(-y/x)}$ удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Леонова О.В. Математика (Линейная алгебра) : учеб. пособие / О.В. Леонова, П.Г. Сорокина. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2019. – 115 с.

2. Леонова О.В. Математика. Курс лекций : учеб. пособие / О.В. Леонова, Н.П. Шерстянкина. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2018. – 156 с.

3. Анапольский Л.Ю. Сборник задач по математике в экономике. Ч. 2: Линейная алгебра. Функции нескольких переменных / Л.Ю. Анапольский, С.И. Никулина. – Иркутск : Изд-во ИГЭА, 2001. – 142 с.

4. Дыхта В.А. Линейная алгебра и экономические модели : учеб. пособие / В.А. Дыхта. – Сер.: Основы математики для экономистов. – Вып. 6. – Иркутск : Изд-во ИГЭА, 1997. – 233 с.

5. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения : учеб. пособие для бакалавров / В.Л. Клюшин. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2013. – 165 с. – Сер. : Бакалавр. Базовый курс.

6. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Задачи и упражнения / В.А. Малугин. – Москва : Эксмо, 2006. – 288 с. – (Высшее экономическое образование).

7. Малугин В.А. Линейная алгебра : учеб. пособие / В.А. Малугин. – Москва : Рид Групп, 2011. – 464 с. – (Национальное экономическое образование).

8. Дыхта В.А. Математическая экономика: начальные понятия, модели, задачи : учеб. пособие / В.А. Дыхта, А.Р. Городкова, Л.С. Калашникова и др. ; науч. ред. и авт. предисл. В.А. Дыхта. – Иркутск : Изд-во ИГЭА, 1995. – 174 с.

9. Миронов В.Л. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие / В.Л. Миронов. – Москва : Изд-во «Дело» АНХ, 2008. – 192 с.

10. Никифоров В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В.А. Никифоров, Б.В. Шкода. – Москва : Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 160 с.

11. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения : учеб.-практ. пособие / Г.И. Просветов. – 2-е изд., доп. – Москва : Альфа-Пресс, 2009. – 208 с.

12. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие / под ред. В.И. Ермаковой. – 2-е изд., испр. – Москва : ИНФРА-М, 2009. – 575 с. – (Высшее экономическое образование).

13. Сборник задач по математике для вузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова. – Москва : Наука, 1986

14. Шипачев В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – Москва : Высшая школа, 2000.

15. Никифорова И.А. Сборник задач по математике в экономике. Ч. 1.: Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной / И.А. Никифорова. – Иркутск : изд-во ИГЭА, 2002.

16. Сидоренко Г.В. Линейная алгебра и линейные экономические модели : учеб. пособие / Г.В. Сидоренко. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009. – 180 с.

17. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – Москва : Наука, 1984.

18. Ильин В.А., Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – Москва : Наука, 1984.

19. Колемаев В.А. Математическая экономика : учебник для вузов / В.А. Колемаев. – 3-е стереотип. изд. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

20. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. : учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – Москва : ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство Мир и Образование», 2008.

21. Kenneth Kuttler. Linear Algebra, Theory and Applications / Kuttler Kenneth. – Textbook Equity LLC Publication, 2013. – 500 p.

22. Sheldon Axler. Linear Algebra. Done Right. Third edition / Axler Sheldon. – Springer ; New York, 2015. – 261 p.

Учебное издание

Леонова Ольга Васильевна

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 09.01.20.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.

http://bgu.ru.