МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для слушателей подготовительных образовательных программ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для слушателей подготовительных образовательных программ

Иркутск
Издательство БГУ
2020

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
М34

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Авторы
Н.В. Антипина, А.В. Баенхаева, О.В. Леонова, С.В. Тимофеев

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доц. В.Р. Абдуллин
канд. физ.-мат. наук, доц. Н.В. Мамонова

М34 Математика : учеб. пособие для слушателей подготовит. образоват. программ / Н.В. Антипина, А.В. Баенхаева, О.В. Леонова, С.В. Тимофеев. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2020. – 109 с. – Режим доступа: http://lib-catalog.bgu.ru.

Содержит материал, необходимый для освоения основного вузовского математического курса. Представлены основы теории, базовые формулы, примеры решения задач, задачи для решения на семинарах и самостоятельного решения.

Для слушателей подготовительных образовательных программ.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

Оглавление

Введение

Учебное пособие предназначено для проведения практических занятий для иностранных слушателей курсов на подготовительном факультете университета, готовящихся к последующему обучению в вузах России. Учащиеся из разных стран мира имеют различный уровень знаний в области математики, поэтому главной задачей является устранение пробелов в них и создание платформы необходимой математической терминологии на русском языке для последующего использования ее в процессе обучения.

В пособии изложен материал основных разделов школьного курса математики, что соответствует рабочей программе подготовительных факультетов высших учебных заведений по данной дисциплине. Каждый раздел включает необходимый теоретический материал (определения, основные формулы и свойства), который иллюстрируется достаточным количеством примеров, и задачи для самостоятельной работы, методически расположенные от простого к сложному. В конце пособия все задания для самостоятельной работы снабжены ответами, а наиболее сложные из них – методическими указаниями к решению. Пособие также содержит графический материал, позволяющий иностранным слушателям восстановить и систематизировать знания по графикам и свойствам основных элементарных функций.

В зависимости от уровня подготовки учащихся и конкретных задач обучения возможно изменение последовательности подачи учебного материала и выборочное его использование.

Пособие поможет систематизировать базовые теоретические знания иностранных учащихся в области математики для решения задач в профессиональной деятельности, развить у них математическое и логическое мышление, выработать и активизировать у студентов практические навыки применения теоретических знаний для решения профессиональных задач, а также умение аналитически мыслить.

Пособие рекомендовано иностранным гражданам – слушателям подготовительных факультетов, языковых курсов, имеющих начальную языковую подготовку, иностранным студентам первого курса для повторения теоретического материала, обобщения знаний из школьной математики, а также самостоятельной подготовки к поступлению в российские вузы.

Глава 1. Алгебраические выражения

§ 1. Преобразование числовых выражений

Числовым выражением называют всякую имеющую смысл запись, которая содержит числа, знаки арифметических действий и скобки.

Например, $3 + 5 \cdot (7 - 4)$ – числовое выражение, а 3+):−(5 – не числовое выражение, а бессмысленный набор символов.

Алгебраическим выражением называют всякую имеющую смысл запись, которая содержит числа, переменные, знаки арифметических действий и скобки.

Алгебраические выражения отличаются от числовых выражений тем, что содержат переменные. Например, $2a - (3b + 10)$ – алгебраическое выражение.

Числовые и алгебраические выражения могут быть очень сложными. Для их вычисления и упрощения ниже приводятся свойства и формулы.

Действия с дробями

Обыкновенной дробью называется одна или несколько равных частей единицы (целого).

Обыкновенная дробь записывается в виде $\frac{a}{b}$ с помощью дробной черты и двух натуральных чисел a и b. Число a называется *числителем*, а число b – *знаменателем обыкновенной дроби* $\frac{a}{b}$.

Примеры обыкновенных дробей: $\frac{3}{7}, \frac{8}{5}, \frac{1}{11}, \frac{263}{129}$.

Десятичной дробью называется обыкновенная дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т.д.

Например, $\frac{1}{10} = 0{,}1$, $\frac{71}{100} = 0{,}71$, $-\frac{347}{1000} = -0{,}347$.

Если $a < b$, то дробь $\frac{a}{b}$ называется *правильной дробью*. Если $a \geq b$, то дробь $\frac{a}{b}$ называется *неправильной дробью*.

Например, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{11}$ – это правильные дроби, а дроби $\frac{8}{5}$, $\frac{263}{129}$ – неправильные.

Число, которое состоит из целого числа (целой части) и правильной дроби (дробной части), называется *смешанным числом*.

Например, $3\frac{2}{9}$, $1\frac{1}{4}$, $10{,}65$ – это смешанные числа.

Любое смешанное число можно записать в виде неправильной дроби. Для этого целую часть умножают на знаменатель дробной части и прибавляют числитель дробной части. Полученная сумма – это числитель неправильной дроби, а знаменатель остается прежним.

Например, $3\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 9+2}{9}=\frac{29}{9}$.

Любую неправильную дробь можно записать в виде смешанного числа. Для этого делят числитель на знаменатель (с остатком). Полученное число будет целой частью, а остаток – числителем дробной части. При этом говорят: «Мы выделили целую часть из неправильной дроби».

Например, $\frac{53}{4}=13\frac{1}{4}$.

Любое целое число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем 1.

Например, $7=\frac{7}{1}$.

Для преобразования числовых и алгебраических выражений используются следующие формулы.

Основные формулы

В дальнейшем будем предполагать, что знаменатель всех дробей не равен нулю.

1. $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{c\cdot a}{c\cdot b}$;
2. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$;
3. $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$;
4. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$;

5. $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}=\dfrac{ad}{bc}$;

6. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c}=\dfrac{a}{b}:c=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{1}{c}=\dfrac{a}{bc}$;

7. $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}=a:\dfrac{b}{c}=a\cdot\dfrac{c}{b}=\dfrac{ac}{b}$.

Примеры

Вычислить:

1. $\dfrac{14}{3-\dfrac{7}{3}}$.

Решение.

$$\frac{14}{3-\dfrac{7}{3}}=\frac{14}{\dfrac{9}{3}-\dfrac{7}{3}}=\frac{14}{\left(\dfrac{2}{3}\right)}=14:\frac{2}{3}=14\cdot\frac{3}{2}=\frac{2\cdot 7\cdot 3}{2}=7\cdot 3=21.$$

Ответ: 21.

2. $\dfrac{\dfrac{25}{3}-7}{\dfrac{2}{3}}$.

Решение.

$$\frac{\dfrac{25}{3}-7}{\dfrac{2}{3}}=\frac{\dfrac{25}{3}-\dfrac{21}{3}}{\dfrac{2}{3}}=\frac{\left(\dfrac{4}{3}\right)}{\left(\dfrac{2}{3}\right)}=\frac{4}{3}:\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=2.$$

Ответ: 2.

3. $\left(\dfrac{3}{5}-0{,}25-\dfrac{1}{8}\right)\cdot 3{,}2+\dfrac{9}{2}:10.$

Решение.

Данное задание лучше выполнять по действиям:

1) $\left(\dfrac{3}{5}-0{,}25-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{3}{5}-\dfrac{25}{100}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3\cdot 8}{5\cdot 8}-\dfrac{2\cdot 5}{4\cdot 2\cdot 5}-\dfrac{5}{5\cdot 8}=$

$$=\frac{24-10-5}{8\cdot 5}=\frac{9}{8\cdot 5}.$$

2) $\frac{9}{8\cdot 5}\cdot 3{,}2=\frac{9}{8\cdot 5}\cdot 3\frac{2}{10}=\frac{9}{8\cdot 5}\cdot 3\frac{1}{5}=\frac{9}{8\cdot 5}\cdot\frac{16}{5}=\frac{9\cdot 2\cdot 8}{8\cdot 5\cdot 5}=\frac{9\cdot 2}{25}=\frac{18}{25}.$

3) $\frac{9}{2}:10=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{2\cdot 10}=\frac{9}{20.}$

4) $\frac{18}{25}+\frac{9}{20}=\frac{18}{5\cdot 5}+\frac{9}{4\cdot 5}=\frac{18\cdot 4}{5\cdot 5\cdot 4}+\frac{9\cdot 5}{4\cdot 5\cdot 5}=\frac{72}{5\cdot 5\cdot 4}+\frac{45}{4\cdot 5\cdot 5}=$

$$=\frac{117}{4\cdot 5\cdot 5}=\frac{117}{100}=1\frac{17}{100}=1{,}17$$

Ответ: 1,17.

4. $2-\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}.$

Решение.

1) $3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9=3\frac{1}{3}\cdot 1\frac{9}{10}=\frac{10}{3}\cdot\frac{19}{10}=\frac{19}{3}.$

2) $19{,}5:4\frac{1}{2}=19\frac{5}{10}:4\frac{1}{2}=19\frac{1}{2}:\frac{9}{2}=\frac{39}{2}\cdot\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 13}{3\cdot 3}=\frac{13}{3}.$

3) $\frac{19}{3}+\frac{13}{3}=\frac{32}{3}.$

4) $\frac{62}{75}-0{,}16=\frac{62}{75}-\frac{16}{100}=\frac{62}{75}-\frac{4}{25}=\frac{62}{75}-\frac{12}{75}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}.$

5) $\frac{32}{3}:\frac{2}{3}=\frac{32}{3}\cdot\frac{3}{2}=16$

6) $2-16=-14.$

Ответ: –14.

5. Расположить в порядке возрастания:

$\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{60}}{100}$, $4\cdot(0{,}03)^2$, $0{,}003.$

Решение.

Здесь предложен лишь один вариант решения:

$4\cdot(0{,}03)^2$:

$$4\cdot\frac{3}{100}\cdot\frac{3}{100}=2\cdot\frac{3}{100}\cdot2\cdot\frac{3}{100}=\frac{6}{100}\cdot\frac{6}{100}.$$

$\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{60}}{100}$:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{60}}{100}=\left(\frac{20}{60}+\frac{1}{60}\right)\cdot\frac{1}{100}=\frac{21}{60}\cdot\frac{1}{100}=\frac{7}{20}\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{20}\cdot\frac{7}{100}=\frac{5}{100}\cdot\frac{7}{100}.$$

$0{,}003$:

$$0{,}003=\frac{3}{1000}=\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{50}=\frac{5}{100}\cdot\frac{6}{100}.$$

Следовательно,

$$\frac{6}{100}\cdot\frac{6}{100}>\frac{5}{100}\cdot\frac{7}{100}>\frac{5}{100}\cdot\frac{6}{100}.$$

Ответ: $0{,}003$; $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{60}}{100}$; $4\cdot(0{,}03)^2$.

6. Какому из данных промежутков принадлежит число $\dfrac{7}{18}$?

1) $[0{,}25;\quad 0{,}3]$;

2) $[0{,}3;\quad 0{,}35]$;

3) $[0{,}35;\quad 0{,}4]$;

4) $[0{,}4;\quad 0{,}45]$.

Решение.

$\dfrac{7}{18}=\dfrac{7\cdot5}{18\cdot5}=\dfrac{35}{90}$. Но $\dfrac{35}{90}>\dfrac{35}{100}=0{,}35\Rightarrow\dfrac{7}{18}>0{,}35$.

С другой стороны, $0{,}4=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}=\dfrac{2\cdot18}{5\cdot18}=\dfrac{36}{90}$. Так как $\dfrac{36}{90}>\dfrac{35}{90}=\dfrac{7}{18}\Rightarrow0{,}35\le\dfrac{7}{18}\le0{,}4$.

Ответ: 3) $[0{,}35;\quad 0{,}4]$.

Задачи для самостоятельного решения

Действия с обыкновенными дробями

1. Найдите значение выражения $\frac{12}{20\cdot 3}$.

2. Найдите значение выражения $\frac{27}{5\cdot 4}$.

3. Вычислите: $\frac{4}{25}+\frac{15}{4}$.

4. Вычислите: $\frac{3}{2}-\frac{9}{5}$.

5. Вычислите: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$.

6. Вычислите: $\frac{7}{9}-\frac{2}{3}$.

7. Вычислите: $5\frac{5}{12}+3\frac{7}{18}$.

8. Вычислите: $12\frac{8}{15}-9\frac{16}{25}$.

9. Вычислите: $41\frac{7}{8}+\frac{3}{2}$.

10. Вычислите: $20\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$.

11. Вычислите: $14\frac{5}{9}+21\frac{5}{12}$.

12. Вычислите: $26\frac{17}{24}-12\frac{25}{32}$.

13. Вычислите: $46\frac{5}{14}-39\frac{11}{21}$.

14. Найдите значение выражения $\frac{1}{\frac{1}{18}-\frac{1}{21}}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{0,9}{1+\frac{1}{8}}$.

16. Найдите значение выражения $18\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2-20\cdot\frac{1}{9}$.

17. Найдите значение выражения $4\frac{4}{9}:\frac{4}{9}$.

18. Найдите значение выражения $\left(\frac{19}{8}+\frac{11}{12}\right):\frac{5}{48}$.

19. Найдите значение выражения $\left(2\frac{3}{4}+2\frac{1}{5}\right)\cdot 16$.

20. Найдите значение выражения $1\frac{8}{17}:\left(\frac{12}{17}+2\frac{7}{11}\right)$.

Действия с десятичными дробями

1. Найдите значение выражения $\frac{2{,}4}{2{,}9-1{,}4}$.

2. Найдите значение выражения $\frac{6{,}9-1{,}5}{2{,}4}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{9{,}4}{4{,}1+5{,}3}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{6{,}9+4{,}1}{0{,}2}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{24}{3{,}2\cdot 2}$.

6. Найдите значение выражения $\frac{4{,}8\cdot 0{,}4}{0{,}6}$.

7. Найдите значение выражения $\frac{21}{0{,}6\cdot 2{,}8}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{1{,}23\cdot 45{,}7}{12{,}3\cdot 0{,}457}$.

9. Найдите значение выражения $\frac{1}{4}+0{,}7$.

10. Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{4}+2\frac{3}{8}\right)\cdot 25{,}8$.

11. Найдите значение выражения $\left(2\frac{4}{7}-1{,}2\right)\cdot 5\frac{5}{6}$.

12. Найдите значение выражения $\left(2\frac{4}{7}-2{,}5\right):\frac{1}{70}$.

13. Найдите значение выражения: $5{,}4\cdot 0{,}8+0{,}08$.

14. Найдите значение выражения: $0{,}03 \cdot 0{,}3 \cdot 30000$.

15. Найдите значение выражения $0{,}007 \cdot 7 \cdot 700$.

Сравнение чисел

1. Выберите меньшее из чисел:

1) $\frac{2}{7}$	2) $\frac{3}{5}$	3) $0{,}55$	4) $0{,}5$

2. Выберите меньшее значение выражения:

1) $\frac{2}{0{,}3}$	2) $2 \cdot 0{,}3$	3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$	4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

3. Выберите большее из чисел:

1) $0{,}7$	2) $\frac{7}{9}$	3) $\frac{9}{7}$	4) $\frac{4}{5}$

4. Выберите большее из чисел:

1) $\frac{2}{7}$	2) $\frac{3}{5}$	3) $0{,}55$	4) $0{,}5$

5. Запишите выражения в порядке убывания: $\frac{61}{100} \cdot 0{,}02; (0{,}11)^2; \frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}$.

1) $\frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}; (0{,}11)^2; \frac{61}{100} \cdot 0{,}02.$	2) $(0{,}11)^2; \frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}; \frac{61}{100} \cdot 0{,}02.$
3) $\frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}; \frac{61}{100} \cdot 0{,}02; (0{,}11)^2.$	4) $\frac{61}{100} \cdot 0{,}02; (0{,}11)^2; \frac{3}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}.$

6. Запишите числа в порядке возрастания: 0,1439; 1,3; 0,14.

1) 0,1439; 0,14; 1,3	2) 1,3; 0,14; 0,1439	3) 0,1439; 1,3; 0,14	4) 0,14; 0,1439; 1,3

7. Запишите числа в порядке убывания: 0,1327; 0,014; 0,13.

1) 0,1327; 0,014; 0,13	2) 0,014; 0,13; 0,1327	3) 0,1327; 0,13; 0,014	4) 0,13; 0,014; 0,1327

8. Запишите выражения в порядке возрастания: $(0{,}12)^2;\ \frac{0{,}6\cdot 0{,}35}{15};\ \frac{3}{200}$.

1) $(0{,}12)^2;\ \frac{3}{200};\ \frac{0{,}6\cdot 0{,}35}{15}$.	2) $\frac{3}{200};\ (0{,}12)^2;\ \frac{0{,}6\cdot 0{,}35}{15}$.
3) $(0{,}12)^2;\ \frac{0{,}6\cdot 0{,}35}{15};\ \frac{3}{200}$.	4) $\frac{0{,}6\cdot 0{,}35}{15};\ (0{,}12)^2;\ \frac{3}{200}$.

9. Выберите выражения, большие нуля:

1) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$	2) $-(-0{,}6)\cdot(-0{,}5)$	3) $\frac{-2{,}5-3}{2{,}5-3}$	4) $0{,}3^2-0{,}3$

10. Выберите верные равенства:

1) $2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$	2) $\frac{11}{14}:3\frac{1}{7}=0{,}25$
3) $1{,}75-2\frac{1}{3}=-\frac{7}{12}$	4) $1{,}6:\left(\frac{2}{3}:\frac{5}{6}\right)=4$

11. Установите соответствие между обыкновенными и десятичными дробями:

А. $\frac{5}{8}$	Б. $\frac{3}{25}$	В. $\frac{1}{2}$	Г. $\frac{1}{50}$
1) 0,5	2) 0,02	3) 0,12	4) 0,625

12. Установите соответствие между выражениями и их значениями:

А. $5-1\frac{4}{5}$	Б. $36:80$	В. $2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$
1) 3,2	2) 1,75	3) 0,45

13. Выберите выражения, которые равны 0,25:

1) $2{,}5-\frac{9}{4}$	2) $3:54$
3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}:1\frac{5}{7}$	4) $\frac{34}{3}-2{,}75:11$

14. В каком отрезке находится число $\frac{7}{11}$?

1) [0,4; 0,5]	2) [0,5; 0,6]	3) [0,6; 0,7]	4) [0,7; 0,8]

15. В каком отрезке находится число $\frac{2}{9}$?

1) [0,1; 0,2]	2) [0,2; 0,3]	3) [0,3; 0,4]	4) [0,4; 0,5]

§ 2. Вычисление значений степенных выражений

Степени и их свойства

Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Число a называется *основанием степени,* число n – *показателем степени.* Например, $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

Основные формулы

Для любых натуральных m и n и любых $a \ge 0$ и $b \ge 0$ справедливы равенства:

1. $1^a = 1$,
2. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$,
3. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$,
4. $b^c \cdot c^a = (bc)^a$,
5. $\dfrac{b^c}{c^a} = \left(\dfrac{b}{c}\right)^a$,
6. $\left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b = a^{bc}$,
7. $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$,
8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-c} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^c$.
9. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
10. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
11. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
12. $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n}$,
13. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
14. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$,
15. $a^0 = 1$,
16. $a^1 = a$,

Примеры

Вычислить:

1. $2^{-1} \cdot (-10)^2 - 0{,}2 \cdot (-10)^3$.

Решение.

$$2^{-1}\cdot(-10)^2-0{,}2\cdot(-10)^3=\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\cdot 10^2-\frac{2}{10}\cdot(-1)^3\cdot 10^3=\frac{10^2}{2}-(-1)\cdot 2\frac{10^3}{10}=$$

$$=50+2\cdot 10^2=50+200=250.$$

Ответ: 250.

2. $5\cdot(10)^{-2}+30\cdot(-0{,}1)^3$.

Решение.

$$5\cdot(10)^{-2}+30\cdot(-0{,}1)^3=\frac{5}{10^2}+3\cdot 10\cdot(-1)^3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{5}{100}-\frac{3\cdot 10}{10^3}=\frac{5}{100}-\frac{3}{10^2}=$$

$$=\frac{5}{100}-\frac{3}{100}=\frac{2}{100}=0{,}02.$$

Ответ: 0,02.

3. $3^5\cdot\left(25^2\right)^3:75^5$.

Решение.

$$3^5\cdot\left(25^2\right)^3:75^5=\frac{3^5\cdot 25^6}{75^5}=\frac{3^5\cdot 25^6}{(3\cdot 25)^5}=\frac{3^5\cdot 25^6}{3^5\cdot 25^5}=25.$$

Ответ: 25.

4. $8^{\frac{1}{2}}:\left(2^{\frac{1}{2}}:9^{\frac{3}{2}}\right)$.

Решение.

$$8^{\frac{1}{2}}:\left(2^{\frac{1}{2}}:9^{\frac{3}{2}}\right)=\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}:\frac{2^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{3}{2}}}=2^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{9^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}=2\cdot 3^3=2\cdot 27=54.$$

Ответ: 54.

5. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+5\cdot(-2)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-2}+1}$.

Решение.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+5\cdot(-2)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-2}+1}=\frac{2^2+5\cdot 2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{2^2}+1}=\frac{6\cdot 2^2+\frac{9}{4}}{\frac{5}{4}}=\left(\frac{24\cdot 4}{4}+\frac{9}{4}\right):\frac{5}{4}=$$

$$=\frac{105}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{105}{5}=21.$$

Ответ: 21.

Найти значение следующих выражений:

6. $\dfrac{x^{-13}\cdot x^{-1}}{x^{-16}}$ при $x=6$.

Решение.

$$\frac{x^{-13}\cdot x^{-1}}{x^{-16}}=x^{-13+(-1)-(-16)}=x^{-13-1+16}=x^{2}\Rightarrow 6^{2}=36.$$

Ответ: 36.

7. $\dfrac{7\cdot\left(m^{5}\right)^{6}+11\cdot\left(m^{3}\right)^{10}}{\left(3\cdot m^{15}\right)^{2}}$.

Решение.

$$\frac{7\cdot\left(m^{5}\right)^{6}+11\cdot\left(m^{3}\right)^{10}}{\left(3\cdot m^{15}\right)^{2}}=\frac{7m^{30}+11m^{30}}{3^{2}\cdot m^{30}}=\frac{18m^{30}}{9m^{30}}=2.$$

Ответ: 2.

8. $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{27}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{27}=\sqrt[3]{16\cdot 4}\cdot\sqrt[4]{3\cdot 27}=\sqrt[3]{2^{4}\cdot 2^{2}}\cdot\sqrt[4]{3\cdot 3^{3}}=\left(2^{6}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(3^{4}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{2}\cdot 3=12.$$

Ответ: 12.

9. $\sqrt[3]{\dfrac{343}{8}\cdot\dfrac{27}{125}}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{\frac{343}{8}\cdot\frac{27}{125}}=\sqrt[3]{\frac{7^{3}}{2^{3}}\cdot\frac{3^{3}}{5^{3}}}=\left(\left(\frac{7\cdot 3}{2\cdot 5}\right)^{3}\right)^{1/3}=\frac{21}{10}=2{,}1.$$

Ответ: 2,1.

10. $\dfrac{4^{\sqrt{5}}\cdot 11^{\sqrt{5}}}{44^{\sqrt{5}-1}}$

Решение.

$$\frac{4^{\sqrt{5}}\cdot 11^{\sqrt{5}}}{44^{\sqrt{5}-1}}=\frac{\left(4\cdot 11\right)^{\sqrt{5}}}{44^{\sqrt{5}-1}}=44^{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)}=44.$$

Ответ: 44.

11. $\sqrt{\sqrt[3]{2^{6}\cdot 6^{12}}}$.

Решение.

$$\sqrt{\sqrt[3]{2^6\cdot 6^{12}}}=\sqrt[6]{2^6\cdot 6^{12}}=\sqrt[6]{2^6}\cdot\sqrt[6]{6^{12}}=\left(2^6\right)^{\frac{1}{6}}\cdot(6^{12})^{\frac{1}{6}}=2\cdot 6^2=72.$$

Ответ: 72.

12. $\sqrt{\sqrt[3]{3^{11}}\cdot\sqrt[3]{3}}+\sqrt[7]{\sqrt{13}\sqrt{13^{13}}}.$

Решение.

$$\sqrt{\sqrt[3]{3^{11}}\cdot\sqrt[3]{3}}+\sqrt[7]{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13^{13}}}\cdot=\sqrt{\sqrt[3]{3^{11}\cdot 3}}+\sqrt[7]{\sqrt{13\cdot 13^{13}}}=\sqrt[6]{3^{12}}+\sqrt[14]{13^{14}}=$$
$$3^2+13=22.$$

Ответ: 22.

13. $\left(1{,}63\sqrt{2\sqrt[5]{16}}+0{,}37\sqrt[5]{16\sqrt{2}}\right)^{-\frac{20}{19}}$

Решение.

$$\left(1{,}63\sqrt{2\sqrt[5]{16}}+0{,}37\sqrt[5]{16\sqrt{2}}\right)^{-\frac{20}{19}}=\left(1{,}63\sqrt{2\cdot 2^{4/5}}+0{,}37\sqrt[5]{2^4\cdot 2^{1/2}}\right)^{-\frac{20}{19}}=$$

$$=\left(1{,}63\left(2^{1+4/5}\right)^{1/2}+0{,}37\left(2^{4+1/2}\right)^{1/5}\right)^{-\frac{20}{19}}=\left(1{,}63\cdot 2^{\frac{9}{10}}+0{,}37\cdot 2^{\frac{9}{10}}\right)^{-\frac{20}{19}}=$$

$$\left(2^{\frac{9}{10}}\left(1{,}63+0{,}37\right)\right)^{-\frac{20}{19}}==\left(2^{\frac{9}{10}}\cdot 2\right)^{-\frac{20}{19}}=\left(2^{\frac{19}{10}}\right)^{-\frac{20}{19}}=2^{-2}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

Ответ: 0,25.

14. Вычислить $\sqrt{\dfrac{b^3\cdot\sqrt[5]{b^6}}{64\sqrt[5]{b}}}$, если $b=2$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{b^3\cdot\sqrt[5]{b^6}}{64\sqrt[5]{b}}}=\sqrt{\frac{b^3\cdot b^{6/5}}{64\cdot b^{1/5}}}=\sqrt{\frac{b^3\cdot b^{\frac{6}{5}-\frac{1}{5}}}{64}}=\sqrt{\frac{b^3\cdot b}{64}}=\frac{b^2}{8}.\Rightarrow$$ Если $b=2$, то $\frac{b^2}{8}=\frac{4}{8}=0{,}5.$

Ответ: 0,5.

15. Вычислить $\sqrt[3]{a^{2/3}+2a^{1/2}-a^{1/3}-a^{1/6}+2}$, если $a=729$.

Решение.

$a = 729 = 9^3 = 3^6 \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{a^{2/3} + 2a^{1/2} - a^{1/3} - a^{1/6} + 2} = \sqrt[3]{\left(3^6\right)^{2/3} + 2\left(3^6\right)^{1/2} - \left(3^6\right)^{1/3} - \left(3^6\right)^{1/6} + 2} =$$

$$\sqrt[3]{\left(3^4\right) + 2\left(3^3\right) - \left(3^2\right) - (3) + 2} = \sqrt[3]{3^3(3+2) - 10} = \sqrt[3]{5(3^3 - 2)} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{5^3} = 5.$$

Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $0{,}9 \cdot (-10)^2 - 120$.
2. Найдите значение выражения $-0{,}2 \cdot (-10)^2 + 55$.
3. Найдите значение выражения $-0{,}7 \cdot (-10)^2 + 90$.
4. Найдите значение выражения $45 + 0{,}6 \cdot (-10)^2$.
5. Найдите значение выражения $80 + 0{,}9 \cdot (-10)^3$.
6. Найдите значение выражения $80 + 0{,}4 \cdot (-10)^3$.
7. Найдите значение выражения $0{,}7 \cdot (-10)^3 - 20$.
8. Найдите значение выражения $-90 + 0{,}7 \cdot (-10)^3$.
9. Найдите значение выражения $0{,}6 \cdot (-10)^3 + 50$.
10. Найдите значение выражения $5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-4}$.
11. Найдите значение выражения $30 \cdot (-0{,}1)^3 + 7 \cdot (-0{,}1)^2 - 3{,}9$.
12. Найдите значение выражения $-0{,}6 \cdot (-9)^4 + 1{,}9 \cdot (-9)^2 - 4$.
13. Найдите значение выражения $0{,}8 \cdot (-7)^4 - 0{,}3 \cdot (-7)^2 + 45$.
14. Найдите значение выражения $(4{,}9 \cdot 10^{-3}) \cdot (4 \cdot 10^{-2})$.
15. Найдите значение выражения $(6{,}7 \cdot 10^{-3}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$.
16. Найдите значение выражения $(1{,}3 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^{-2})$.
17. Найдите значение выражения $(5^{12})^3 : 5^{37}$.
18. Вычислите: $\dfrac{7^{-7} \cdot 7^{-8}}{7^{-13}}$.
19. Найдите значение выражения $(16 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (13 \cdot 10^4)$.
20. Найдите значение выражения $(49^6)^3 : (7^7)^5$.
21. Найдите значение выражения $4^8 \cdot 11^{10} : 44^8$.
22. Найдите значение выражения $\dfrac{2^6 \cdot 3^8}{6^5}$.
23. Найдите значение выражения $5^{0,36} \cdot 25^{0,32}$.
24. Найдите значение выражения $\dfrac{49^{5,2}}{7^{8,4}}$.

25. Найдите значение выражения $\frac{3^{6,5}}{9^{2,25}}$.

26. Найдите значение выражения $\frac{2^{3,5}\cdot 3^{5,5}}{6^{4,5}}$.

27. Найдите значение выражения $35^{-4,7}\cdot 7^{5,7}:5^{-3,7}$.

28. Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}}\cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

29. Найдите значение выражения $\frac{\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^{9}}$.

30. Найдите значение выражения $0{,}8^{\frac{1}{7}}\cdot 5^{\frac{2}{7}}\cdot 20^{\frac{6}{7}}$.

31. Найдите значение выражения $(7x^{3})^{2}:(7x^{6})$.

32. Найдите значение выражения $(4a)^{3}:a^{7}\cdot a^{4}$.

33. Найдите значение выражения $8x^{7}\cdot x^{13}:(3x^{10})^{2}$.

34. Найдите значение выражения $\left((2x^{3})^{4}-(x^{2})^{6}\right):(3x^{12})$.

35. Найдите значение выражения $\frac{(5a^{2})^{3}\cdot(6b)^{2}}{(30a^{3}b)^{2}}$.

36. Найдите значение выражения $\frac{(3x)^{3}\cdot x^{-9}}{x^{-10}\cdot 2x^{4}}$.

37. Найдите значение выражения $\frac{a^{2}b^{-6}}{(4a)^{3}b^{-2}}\cdot\frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

38. Найдите значение выражения $b^{5}:b^{9}\cdot b^{6}$.при $b=0{,}01$.

39. Найдите значение выражения $(4b)^{3}:b^{9}\cdot b^{5}$.при $b=128$.

40. Найдите значение выражения $(2a^{3})^{4}:(2a^{11})$.при $a=11$.

41. Найдите значение выражения $\frac{x^{-5}\cdot x^{8}}{x}$ при $x=4$.

42. Сократите дробь $\frac{(2x)^{4}\cdot x^{-10}}{x^{-9}\cdot 5x^{3}}$.

43. Сократите дробь $\frac{(2x)^{2}\cdot x^{-9}}{x^{-15}\cdot 5x^{8}}$.

44. Найдите значение выражения $6x\left(3x^{12}\right)^{3}:\left(3x^{9}\right)^{4}$ при $x=75$.

45. Найдите значение выражения $\frac{11a^{6}b^{3}-(3a^{2}b)^{3}}{4a^{6}b^{6}}$ при $b=2$.

46. Найдите значение выражения $\frac{6n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{12}}\cdot n^{\frac{1}{4}}}$ при $n>0$.

47. Найдите значение выражения $\dfrac{n^{\frac{5}{6}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{4}}}$ при $n = 64$.

48. Найдите значение выражения $b^{\frac{1}{5}} \cdot (b^{\frac{9}{10}})^2$ при $b = 7$.

49. Найдите значение выражения $a^{0,65} \cdot a^{0,67} \cdot a^{0,68}$ при $a = 11$.

50. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{7,4}}{a^{8,4}}$ при $a = 0,4$.

51. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}}$.при $a = 12$.

52. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{3,33}}{a^{2,11} \cdot a^{2,22}}$ при $a = \dfrac{2}{7}$.

53. Найдите значение выражения $\dfrac{(9b)^{1,5} \cdot b^{2,7}}{b^{4,2}}$ при $b > 0$.

54. Найдите значение выражения $\dfrac{b^{3\sqrt{2}+2}}{(b^{\sqrt{2}})^3}$ при $b = 6$.

55. Найдите значение выражения $x \cdot 3^{2x+1} \cdot 9^{-x}$ при $x = 5$.

56. Найдите значение выражения $7^{2x-1} : 49^x : x$ при $x = \dfrac{1}{14}$.

57. Сократите дробь $\dfrac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$.

58. Упростите выражение: $\dfrac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$.

59. Упростите выражение: $\dfrac{10 \cdot 2^n}{2^{n+1} + 2^{n-1}}$.

60. Сократите дробь $\dfrac{100^n}{5^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}$.

61. Сократите дробь $\dfrac{2^{n+2} \cdot 21^{n+3}}{6^{n+1} \cdot 7^{n+2}}$.

Преобразование числовых иррациональных выражений

1. Найдите значение выражения $\left(3\sqrt{2}\right)^2$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{(2\sqrt{6})^2}{36}$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(8\sqrt{3}\right)^2}{8}$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$.

5. Найдите значение выражения $\sqrt{90\cdot 30\cdot 3}$.

6. Найдите значение выражения $5\sqrt{11}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt{11\cdot 2^2}\cdot\sqrt{11\cdot 3^4}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{8}}$.

9. Найдите значение выражения $\sqrt{18\cdot 80}\cdot\sqrt{30}$.

10. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{23}+1\right)^2$.

11. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{85}-1\right)^2$.

12. Найдите значение выражения $3^{\sqrt{5}+10}\cdot 3^{-5-\sqrt{5}}$.

13. Найдите значение выражения $5^{3\sqrt{7}-1}\cdot 5^{1-\sqrt{7}}:5^{2\sqrt{7}-1}$.

14. Найдите значение выражения $2^{3\sqrt{7}-1}\cdot 8^{1-\sqrt{7}}$.

15. Найдите значение выражения $\dfrac{0{,}5^{\sqrt{10}-1}}{2^{-\sqrt{10}}}$.

16. Найдите значение выражения $\dfrac{6^{\sqrt{3}}\cdot 7^{\sqrt{3}}}{42^{\sqrt{3}-1}}$.

17. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{15}-\sqrt{60}\right)\cdot\sqrt{15}$.

18. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{63}-\sqrt{28}\right)\cdot\sqrt{7}$.

19. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{54}-\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$.

20. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{75}-\sqrt{48}\right)\cdot\sqrt{12}$.

21. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2{,}8}\cdot\sqrt{4{,}2}}{\sqrt{0{,}24}}$.

22. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}}-\sqrt{1\frac{5}{7}}\right):\sqrt{\frac{3}{28}}$.

23. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{2}}\right)^2$.

24. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[15]{5}\cdot 5\cdot\sqrt[10]{5}}{\sqrt[6]{5}}$.

25. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

26. Найдите значение выражения $5\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$.

27. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[6]{49}$.

28. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[5]{10}\cdot\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$.

Преобразование буквенных иррациональных выражений

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt[3]{7a^2}\right)^6}{a^4}$ при $a \neq 0$.

2. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{a}\sqrt[18]{a}}{a\sqrt[6]{a}}$ при $a = 1{,}25$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(b^{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}}}{b^4}$ при $b = 5$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(4a)^{2,5}}{a^2\sqrt{a}}$ при $a > 0$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{3}a\right)^2\sqrt[5]{a^3}}{a^{2,6}}$ при $a > 0$.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ при $m = 64$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{12\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}{\sqrt[6]{m}}$ при $m > 0$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{81\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[14]{b}}$ при $b > 0$.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[9]{\sqrt{m}}}{\sqrt{16\sqrt[9]{m}}}$ при $m > 0$.

10. Найдите значение выражения $\dfrac{15\sqrt[5]{\sqrt[28]{a}}-7\sqrt[7]{\sqrt[20]{a}}}{2\sqrt[35]{\sqrt[4]{a}}}$ при $a > 0$.

11. Найдите значение выражения $\dfrac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{7\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}+\dfrac{5\sqrt{x}}{x}+3x-4$ при $x = 3$.

13. Найдите $h(5+x)+h(5-x)$, если $h(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-10}$.

14. Найдите $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x)=\sqrt[3]{x(4-x)}$ при $|x| \neq 2$.

§ 3. Преобразование алгебраических выражений

Основные формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
3. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
5. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
7. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Следует иметь в виду, что формулы (3–5) могут быть использованы для разложения выражений $a\pm b$ следующим образом:

8. $a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.
9. $a-b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.
10. $a+b=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$.

Если x_1, x_2 − корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то справедлива формула $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Также бывает полезной формула

11. $\left(\sqrt{[f(x)]^2}\right)=\begin{cases} f(x), & \textit{если} \quad f(x)\ge 0, \\ -f(x), & \textit{если} \quad f(x)<0. \end{cases}$

Примеры

1. Найти значение выражения $(5x-9)(5x+9)-25x^2-4x-19$, если $x=100$.

Решение.

$(5x-9)(5x+9)-25x^2-4x-19=25x^2-81-25x^2-4x-19=-4x-100\Rightarrow$ если $x=100$, то $-4x-100=-400-100=-500$.

Ответ: –500.

Упростить следующие выражения:

2. $(x^{1/2}+7)^2-(x^{1/2}-7)^2$.

Решение.

Первый способ:

$$(x^{1/2}+7)^2-(x^{1/2}-7)^2=\left[(x^{1/2}+7)-(x^{1/2}-7)\right]\cdot\left[(x^{1/2}+7)+(x^{1/2}-7)\right]=$$
$$\left[x^{1/2}+7-x^{1/2}+7\right]\cdot\left[x^{1/2}+7+x^{1/2}-7\right]=14\cdot 2\cdot x^{1/2}=28\cdot x^{1/2}$$

Второй способ:

$$(x^{1/2}+7)^2-(x^{1/2}-7)^2=\left(x+2\cdot 7\cdot x^{1/2}+49\right)-\left(x-2\cdot 7\cdot x^{1/2}+49\right)=$$
$$x+14x^{1/2}+49-x+14x^{1/2}-49=28\cdot x^{1/2}.$$

Ответ: $28\cdot x^{1/2}$.

3. $(x^{1/3}+2)^3-12x^{1/3}-6x^{2/3}$.

Решение.

$$(x^{1/3}+2)^3-12x^{1/3}-6x^{2/3}=x+3x^{2/3}\cdot 2+3x^{1/3}\cdot 4+2^3-12x^{1/3}-6x^{2/3}=$$
$$x+6x^{2/3}+12x^{1/3}+8-12x^{1/3}-6x^{2/3}=x+8.$$

Ответ: $x+8$.

4. $\dfrac{z^3-125}{z^2+5z+25}+\dfrac{z^3+125}{z^2-5z+25}$.

Решение.

$$\frac{z^3-125}{z^2+5z+25}+\frac{z^3+125}{z^2-5z+25}=\frac{(z-5)(z^2+5z+25)}{z^2+5z+25}+\frac{(z+5)(z^2-5z+25)}{z^2-5z+25}=$$
$$(z-5)+(z+5)=2z.$$

Ответ: $2z$.

5. $\dfrac{a^{4/7}-9}{a^{2/7}+3}+3$.

Решение.

$$\frac{a^{4/7}-9}{a^{2/7}+3}+3=\frac{(a^{2/7}-3)(a^{2/7}+3)}{a^{2/7}+3}+3=(a^{2/7}-3)+3=a^{2/7}.$$

Ответ: $a^{2/7}$.

6. $\dfrac{k+8}{k^{2/3}-2k^{1/3}+4}-k^{1/3}$.

Решение.

$$\frac{k+8}{k^{2/3}-2k^{1/3}+4}-k^{1/3}=\frac{(k^{1/3})^3+2^3}{k^{2/3}-2k^{1/3}+4}-k^{1/3}=\frac{(k^{1/3}+2)(k^{2/3}-2k^{1/3}+4)}{k^{2/3}-2k^{1/3}+4}-k^{1/3}=$$
$$(k^{1/3}+2)-k^{1/3}=2.$$

Ответ: 2.

7. $\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}.$

Решение.

$$\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{(\sqrt[4]{a})^2-(\sqrt[4]{b})^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}--\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=0.$$

Ответ: 0.

8. $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-(\sqrt[3]{a^2}+b^{2/3})$.

Решение.

$$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-(\sqrt[3]{a^2}+b^{2/3})=\frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-(\sqrt[3]{a^2}+b^{2/3})=$$
$$\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})=$$
$$(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})-(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})=-\sqrt[3]{ab}.$$

Ответ: $-\sqrt[3]{ab}$.

9. $\left(\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{4x+2}{4-x^2}\right):\dfrac{2x+1}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}.$

Решение.

Пример лучше решать по действиям:

1) $\left(\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{4x+2}{4-x^2}\right)=\dfrac{2x+1}{x+2}-\dfrac{4x+2}{(2-x)(2+x)}=\dfrac{(2x+1)(2-x)}{(x+2)(2-x)}-\dfrac{4x+2}{(2-x)(2+x)}=$

$$\frac{4x-2x^2+2-x-4x-2}{(2-x)(2+x)}=\frac{-2x^2-x}{(2-x)(2+x)}=-\frac{x(2x+1)}{(2-x)(2+x)}.$$

2) $-\dfrac{x(2x+1)}{(2-x)(2+x)}:\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{x(2x+1)}{(x-2)(2+x)}\cdot\dfrac{x-2}{2x+1}=\dfrac{x}{2+x}.$

3) $\frac{x}{2+x}+\frac{2}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}=1.$

Ответ: 1.

10. $\left(\frac{x^3+y^3}{x+y}-\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}+\frac{2x^2y+2xy^2}{x+y}\right).$

Решение.

1) $\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}=x^2-xy+y^2.$

2) $\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=(x^2+y^2).$

3) $\frac{2x^2y+2xy^2}{x+y}=\frac{2xy(x+y)}{x+y}=2xy.$

4) $(x^2-xy+y^2)-(x^2+y^2)+2xy=x^2-xy+y^2-x^2-y^2+2xy=xy.$

Ответ: xy.

11. $\left(\frac{x^2-4x+4}{2x^2-6x+4}+\frac{3x-2}{2x-2}\right).$

Решение.

1) $x^2-4x+4=x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2=(x-2)^2.$

2) Найдем корни уравнения $2x^2-6x+4=0$:

$2x^2-6x+4=0,$

$\Delta=6^2-4\cdot 2\cdot 4=36-32=4,$

$x_1=\frac{6-\sqrt{4}}{4}=\frac{6-2}{4}=1,$

$x_2=\frac{6+\sqrt{4}}{4}=\frac{6+2}{4}=2,\Rightarrow 2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$

3) $\frac{x^2-4x+4}{2x^2-6x+4}=\frac{(x-2)^2}{2(x-1)(x-2)}=\frac{(x-2)}{2(x-1)}.$

4) $\frac{(x-2)}{2(x-1)}+\frac{3x-2}{2x-2}=\frac{x-2+3x-2}{2(x-1)}=\frac{4x-4}{2(x-1)}=\frac{4(x-1)}{2(x-1)}=2.$

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

Возведите в квадрат и куб:

1. $(4a+3b)^2$.

2. $(2x-7y)^2$.

3. $(5b^3-4b^4)^2$.

4. $(3y^2+5z^3)^3$.

5. $\left(4b-\frac{1}{3}c^2\right)^3$.

Разложите многочлены на множители:

6. $4x^2-y^2$.

7. $16a^2-b^2$.

8. x^4-9y^{12}.

9. $(x+1)^2-16$.

10. $25-(c-2)^2$.

11. $(y-2)^2-(z+1)^2$.

12. $(2a-b)^2-(a+b)^2$

13. $27-a^3$.

14. $64+b^3$.

15. $64+x^3y^3$.

16. $27x^3-8y^3$.

17. $x-y$.

18. $4x-9y$.

19. $x+y$.

20. $8a+27b$.

21. Найдите значение выражения $\frac{9axy-(-7xya)}{4yax}$.

22. Найдите значение выражения $(9axy-(-6xya)):(3yax)$.

23. Найдите значение выражения $(5axy-(-3xya)):(4yax)$.

24. Разложите на множители: x^2y+1-x^2-y.

25. Сократите дробь $\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

26. Сократите дробь $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}$.

27. Сократите дробь $\frac{x^3+2x^2-9x-18}{(x-3)(x+2)}$.

28. Сократите дробь $\dfrac{ab-2b-6+3a}{a^2-4}$.

29. Найдите значение выражения $\dfrac{(11a)^2-11a}{11a^2-a}$.

30. Найдите значение выражения $(2x-5)(2x+5)-4x^2$.

31. Найдите значение выражения $(7x-13)(7x+13)-49x^2+6x+22$ при $x=80$.

32. Найдите значение выражения $(4x^2+y^2-(2x-y)^2):(2xy)$.

33. Найдите значение выражения $\dfrac{(3x+2y)^2-9x^2-4y^2}{6xy}$.

34. Найдите значение выражения $\dfrac{(4x-3y)^2-(4x+3y)^2}{4xy}$.

35. Найдите значение выражения $\dfrac{9x^2-4}{3x+2}-3x$.

36. Найдите значение выражения $(a^3-16a)\cdot\left(\dfrac{1}{a+4}-\dfrac{1}{a-4}\right)$ при $a=-45$.

37. Найдите значение выражения $(4a^2-9)\cdot\left(\dfrac{1}{2a-3}-\dfrac{1}{2a+3}\right)$.

38. Найдите значение выражения $a(36a^2-25)\cdot\left(\dfrac{1}{6a+5}-\dfrac{1}{6a-5}\right)$ при $a=36{,}7$.

39. Найдите значение выражения $(9b^2-49)\cdot\left(\dfrac{1}{3b-7}-\dfrac{1}{3b+7}\right)+b-13$ при $b=345$.

40. Найдите значение выражения $\dfrac{7a}{6c}-\dfrac{49a^2+36c^2}{42ac}+\dfrac{6c-49a}{7a}$ при $a=71,\ c=87$.

41. Упростите выражение $\dfrac{3x^2+4x}{x^2-2x}-\dfrac{2x-7}{x}-\dfrac{x+8}{x-2}$.

42. Упростите выражение: $\dfrac{6}{a-1}-\dfrac{10}{(a-1)^2}:\dfrac{10}{a^2-1}-\dfrac{2a+2}{a-1}$.

43. Упростите выражение: $\dfrac{m}{m^2-2m+1}-\dfrac{m+2}{m^2+m-2}$.

44. Найдите $\frac{a}{b}$, если $\frac{2a+5b}{5a+2b}=1.$

45. Найдите $\frac{a+9b+16}{a+3b+8}$, если $\frac{a}{b}=3.$

46. Найдите значение выражения $39a-15b+25,$ если $\frac{3a-6b+4}{6a-3b+4}=7.$

47. Найдите $61a-11b+50,$ если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9.$

48. Найдите значение выражения $2x+y+6z,$ если $4x+y=5,$ а $12z+y=7.$

49. Найдите значение выражения $3p(a)-6a+7,$ если $p(a)=2a-3.$

50. Найдите значение выражения $q(b-2)-q(b+2),$ если $q(b)=3b.$

51. Найдите $p(x-7)+p(13-x)$, если $p(x)=2x+1.$

52. Найдите $p(x)+p(6-x)$, если $p(x)=\frac{x(6-x)}{x-3}$ при $x\neq 3.$

53. Найдите $2p(x-7)-p(2x)$, если $p(x)=x-3.$

54. Найдите значение выражения $5(p(2x)-2p(x+5)),$ если $p(x)=x-10.$

55. Найдите значение выражения $\frac{g(x-9)}{g(x-11)}$, если $g(x)=8^x.$

56. Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(10-a)}$,если $p(a)=\frac{a(10-a)}{a-5}.$

57. Найдите $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b)=\left(b+\frac{3}{b}\right)\left(3b+\frac{1}{b}\right)$. при $b\neq 0.$

Преобразование различных выражений

1. Найдите значение выражения $\sqrt{65^2-56^2}$.

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)$.

3. Упростите выражение $\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)^2}{10+\sqrt{91}}$.

5. Найдите значение выражения $x+\sqrt{x^2-4x+4}$ при $x\leq 2.$

6. Найдите значение выражения $\sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{(a-10)^2}$ при $6 \le a \le 10$.

Упростите выражения:

7. $\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\right).$

8. $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:(x-y)+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$

9. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right).$

10. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

11. $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}.$

12. $\left(\dfrac{\sqrt{m-a}}{\sqrt{m+a}+\sqrt{m-a}}+\dfrac{m-a}{\sqrt{m^2-a^2}-m+a}\right):\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2}-1},\ a>0.$

13. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-x^2}+x.$

14. $a\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}.$

15. $\left(a^2\sqrt{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

16. $\left(\dfrac{x+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{a}}-\dfrac{x-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{a}}+\dfrac{\sqrt[3]{xa^2}-\sqrt[3]{x^4\sqrt{a}}}{x-\sqrt{a}}\right)^3.$

Глава 2. Уравнения и системы уравнений

§ 1. Линейные, квадратные и рациональные уравнения

Уравнение вида $kx+b=0$, где $k,b\in R$ и $k\neq 0$, называется *линейным.* Здесь x – независимая величина, подлежащая определению. Решим линейное уравнение $kx+b=0$:

$$kx+b=0\Rightarrow kx=-b\Rightarrow x=-\frac{b}{k}.$$

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где $a,b,c\in R$ и $a\neq 0$, называется *квадратным*. Здесь x – неизвестная величина, подлежащая определению.

Для решения квадратного уравнения используют следующий алгоритм:

$$ax^2+bx+c=0\Rightarrow \text{Найдем величину } \Delta=b^2-4ac\Rightarrow$$

1. Если $\Delta>0$, то уравнение имеет два решения: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Если $\Delta=0$, то $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

3. Если $\Delta<0$, то уравнение не имеет решений.

Если b или c равны нулю, то квадратное уравнение можно решить более простым способом:

1. Пусть $c=0, b\neq 0\Rightarrow ax^2+bx=0\Rightarrow x(ax+b)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-\frac{b}{a}. \end{array}\right.$

2. Пусть $b=0, c\neq 0\Rightarrow ax^2+c=0\Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}\Rightarrow$

при $-\frac{c}{a}>0\Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$,

при $-\frac{c}{a}<0$ уравнение не имеет решений.

Квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0\Rightarrow$ называется *приведенным.* Кроме основного алгоритма, для решения уравнения можно применить *формулы Виета*.

Если x_1 и x_2 – корни уравнения, то выполняются соотношения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Уравнение, содержащее выражения с искомой величиной x в знаменателе дроби, называется *рациональным.*

При решении таких уравнений нужно учитывать, что выражение в знаменателе дроби не может быть равным нулю. Иначе – говорят, что необходимо найти область допустимых значений уравнения (ОДЗ).

Также для решения рациональных уравнений часто используется метод замены переменной.

Примеры

Решить уравнения:

1. $1+8(10-x)=9$.

Решение.

$1+8(10-x)=9 \Rightarrow 1+80-8x=9 \Rightarrow -8x+72=0 \Rightarrow x=\dfrac{72}{8}=9$.

Ответ: $x=9$.

2. $\dfrac{1}{9x+2}=\dfrac{1}{8x-4}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 9x+2 \neq 0, \\ 8x-4 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{2}{9}, \\ x \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$\dfrac{1}{9x+2}=\dfrac{1}{8x-4} \Rightarrow 8x-4=9x+2 \Rightarrow 9x+2-8x+4=0 \Rightarrow x+6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-6.$

Ответ: $x=-6$.

3. $\dfrac{x+4}{5x+9}=\dfrac{x+4}{4x-5}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 5x+9 \neq 0, \\ 4x-5 \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{9}{5}, \\ x \neq \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

$$\frac{x+4}{5x+9} = \frac{x+4}{4x-5} \Rightarrow (x+4)\left(\frac{1}{5x+9} - \frac{1}{4x-5}\right) = 0 \Rightarrow (x+4) = 0,$$

или $\dfrac{1}{5x+9} = \dfrac{1}{4x-5} \Rightarrow (x+4)\left(\dfrac{1}{5x+9} - \dfrac{1}{4x-5}\right) = 0 \Rightarrow (x+4) = 0 \Rightarrow$

$x = -4.$

$$\frac{1}{5x+9} = \frac{1}{4x-5} \Rightarrow (4x-5) = (5x+9) \Rightarrow x = -14.$$

Ответ: $x_1 = -14; \quad x_2 = -4.$

4. $(x+11)^2 = 44x$.

Решение.

$(x+11)^2 = 44x \Rightarrow x^2 + 22x + 121 = 44x \Rightarrow x^2 - 22x + 121 = 0 \Rightarrow$

$(x+11)^2 = 0 \Rightarrow x = 11.$

Ответ: $x = 11$.

5. $(x-2)(x^2+2x+1) = 4(x+1)$.

Решение.

$(x-2)(x^2+2x+1) = 4(x+1) \Rightarrow (x-2)(x+1)^2 - 4(x+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+1)\left[(x-2)(x+1) - 4\right] = 0 \Rightarrow$

1) $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$ или

2) $(x-2)(x+1) - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2, \ \ x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3.$$

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 3.$

6. $2 \cdot x - 30 - x^2 = 2x^2 - 20x + 5$.

Решение.

$2 \cdot x - 30 - x^2 = 2x^2 - 20x + 5 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 35 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 35 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 35 = 484 - 12 \cdot 35 = 64 > 0 \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{22-\sqrt{64}}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3},$$

$$x_2 = \frac{22+\sqrt{64}}{6} = \frac{30}{6} = 5.$$

Ответ: $x_1 = \frac{7}{3}; \quad x_2 = 5.$

7. $2\cdot x^4 + 5x^2 - 7 = 0$.

Решение.

Это уравнение называется *биквадратным.* В этом случаем делается замена $x^2 = t \ge 0 \Rightarrow 2\cdot x^4 + 5x^2 - 7 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 5t - 7 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (25) - 4\cdot 2\cdot(-7) = 25 + 56 = 81 > 0 \Rightarrow$

$t_1 = \frac{-5-\sqrt{81}}{4} = -\frac{14}{4}$ – посторонний корень, так как $t \ge 0 \Rightarrow$

$t_2 = \frac{-5+\sqrt{81}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

Ответ: $x = \pm 1.$

8. $\frac{x^2-3}{x} + \frac{6x}{x^2-3} - 5 = 0$.

Решение.

$\frac{x^2-3}{x} + \frac{6x}{x^2-3} - 5 = 0$.

Замена: $\frac{x^2-3}{x} = t \Rightarrow t + \frac{6}{t} - 5 = 0 \Rightarrow$

$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = 3 \Rightarrow$

1) $\frac{x^2-3}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 3 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$

2) $\frac{x^2-3}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 21 \Rightarrow x_3 = \frac{3-\sqrt{21}}{3}; \quad x_4 = \frac{3+\sqrt{21}}{3};$

Ответ: $x_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{21}}{3}; \quad x_3 = -1; \quad x_4 = 3.$

9. $\frac{9}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)^2}{16} = 3\cdot\left(\frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{4}\right) - \frac{1}{2}$, найти корни из отрезка [0; 2].

Решение.

$$\frac{9}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{16}=3\cdot\left(\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}\right)-\frac{1}{2},\Rightarrow$$

Сделаем замену:

$$\frac{3}{(x+1)}-\frac{(x+1)}{4}=t\Rightarrow t^2=\frac{9}{(x+1)^2}-\frac{3}{2}+\frac{(x+1)^2}{16}\Rightarrow$$

$$\frac{9}{(x+1)^2}+\frac{(x+1)^2}{16}=t^2+\frac{3}{2}\Rightarrow t^2+\frac{3}{2}=3t-\frac{1}{2}\Rightarrow t^2-3t+2=0\Rightarrow$$

$t_1=1,\quad t_2=2\Rightarrow$

1) $\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{(x+1)}{4}=1\Rightarrow 12-(x+1)^2=4(x+1)\Rightarrow$

$(x+1)^2+4(x+1)-12=0\Rightarrow$

Пусть $x+1=y\Rightarrow y^2+4y-12=0\Rightarrow y_1=-6,\quad y_2=2\Rightarrow x_1=-7,\ x_2=1.$

$x_1\notin[0;\,2],\quad x_2\in[0;\,2];$

2) $\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{(x+1)}{4}=2\Rightarrow 12-(x+1)^2=8(x+1)\Rightarrow$

$(x+1)^2+8(x+1)-12=0\Rightarrow$

Пусть $x+1=y\Rightarrow y^2+8y-12=0\Rightarrow\Delta=8^2-4\cdot1\cdot(-12)=64+48=112\Rightarrow$

$$y_1=\frac{-8-\sqrt{112}}{2}=\frac{-8-4\sqrt{7}}{2}=-4-2\sqrt{7}.$$

$$y_2=\frac{-8+\sqrt{112}}{2}=\frac{-8+4\sqrt{7}}{2}=-4+2\sqrt{7}.$$

$\Rightarrow x_3=-5-2\sqrt{7}\notin[0;\,2],\quad x_4=-5+2\sqrt{7}.$

Так как $2\sqrt{7}>5,$ потому что $(2\sqrt{7})^2>5^2,$ то $\Rightarrow x_4=-5+2\sqrt{7}>0.$

Но $-5+2\sqrt{7}<2,$ так как $(2\sqrt{7})<7.\Rightarrow x_4\in[0;\quad 2].$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=-5+2\sqrt{7}$.

10. Найти $\dfrac{x_2}{1+x_1}+\dfrac{x_1}{1+x_2}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $-x^2+5x+8=0$.

Решение.

$-x^2+5x+8=0\Rightarrow x^2-5x-8=0$ – приведенное квадратное уравнение.

По формулам Виета имеем:

$\begin{cases}x_1+x_2=5,\\ x_1\cdot x_2=-8,\end{cases}$ где x_1, x_2 – корни этого уравнения. $\Rightarrow$

$$\frac{x_2}{1+x_1}+\frac{x_1}{1+x_2}=\frac{x_2+x_2^2+x_1+x_1^2}{(1+x_1)\cdot(1+x_2)}=\frac{(x_1+x_2)+(x_1^2+x_2^2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}=$$

$$\frac{5+(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2)}{1+5-8}=\frac{5+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{-2}=\frac{5+5^2-2\cdot(-8)}{-2}=$$

$$=-\frac{46}{2}=-23.$$

Ответ: -23.

Задачи для самостоятельного решения

Линейные уравнения

Решите уравнения:

1. $4x+7=0$.
2. $2x+2=-3$.
3. $10x+9=7x.$
4. $10(x-9)=7.$
5. $-5x=-6x+8.$
6. $7x-13=-13+7x$.
7. $0\cdot x=28$.
8. $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-\left(\frac{1}{2}+x\right)^2=-2x$.
9. $\frac{-3x+4x^2}{5}=(0{,}8x-0{,}6)x$.
10. $5-3x=7-3x$.
11. $1\frac{3}{5}\cdot x=1\frac{1}{2}.$
12. $x-34=x+54$.
13. $2(3x-1)-3(2x+1)=6$.
14. $x-\frac{x}{12}=\frac{55}{12}$.
15. $x+7-\frac{x}{3}=3.$
16. $3-\frac{x}{7}=\frac{x}{3}.$
17. $13+\frac{x}{4}=x+1.$

18. $\frac{x}{12}+\frac{x}{8}+x=-\frac{29}{6}.$

19. $\frac{x-6}{2}-\frac{x}{3}=3.$

20. $\frac{x+5}{5}-x=2.$

21. $x-11=\frac{x+7}{7}.$

22. $(-5x+3)(-x+6)=0.$

23. $-9(8-9x)=4x+5.$

24. $9-2(-4x+7)=7.$

25. $2-3(2x+2)=5-4x.$

26. $5-2x=11-7(x+2).$

27. $3x+5+(x+5)=(1-x)+4.$

28. $-x-2+3(x-3)=3(4-x)-3.$

29. $2x^2-x-1=x^2-5x-(-1-x^2).$

30. $7(3x-6)+5(x-3)-2(x-7)=5.$

31. $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$.

32. $(x+1)^3-(x-1)^3=6(x^2+x+1).$

Квадратные уравнения

1. Решите уравнение $x^2 - x - 6 = 0$.
2. Найдите корни уравнения $x^2 - 7x - 18 = 0$.
3. Решите уравнение $x^2+8x+7=0$.
4. Решите уравнение $x^2-9x+8=0$.
5. Решите уравнение $2x^2-3x+1=0$.
6. Решите уравнение $2x^2-3x+4=0$.
7. Решите уравнение $9x^2+6x+1=0$.
8. Решите уравнение $x^2-10x+24=0$.
9. Решите уравнение $x^2 + 3x = 4$.
10. Решите уравнение $x^2 = 2x + 8$.
11. Найдите корни уравнения $x^2 + 4 = 5x$.
12. Решите уравнение $4x^2 + 7 = 7 + 24x$.
13. Решите уравнение $(x + 10)^2 = (5 - x)^2$.
14. Решите уравнение $(x + 2)^2 = (x - 4)^2$.

15. Решите уравнение $-2x^2 + x + 7 = -x^2 + 5x + (-2 - x^2)$.

16. Решите уравнение $(x - 4)^2 + (x + 9)^2 = 2x^2$.

17. Найдите корни уравнения $25x^2 - 1 = 0$.

18. Найдите корни уравнения $2x^2 - 10x = 0$.

19. Решите уравнение $7x^4 + x^2 - 8 = 0$.

20. Решите уравнение $x^4 + 7x^2 + 6 = 0$.

21. Решите уравнение $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$.

22. Решите уравнение $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Теорема Виета

Составить квадратное уравнение по его корням:

а) $x_1 = 2,\ x_2 = 8$;

б) $x_1 = 3,\ x_2 = 5$;

в) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$.

1. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни –6; 4. Найдите q.

2. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни –5; 7. Найдите q.

3. Квадратный трехчлен разложен на множители: $x^2 + 6x - 27 = (x + 9)(x - a)$. Найдите a.

Рациональные уравнения

Решите уравнения:

1. $\frac{9}{x-2} = \frac{9}{2}$.

2. $\frac{x-4}{x-6} = 2$.

3. $\frac{x-12}{x-4} = \frac{3}{5}$.

4. $\frac{3}{x-19} = \frac{19}{x-3}$.

5. $x - \frac{6}{x} = -1$.

6. $\frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$.

7. $\frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5}$.

8. $\frac{x^2-1}{x}=x^2-\frac{1}{x}.$

9. $\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2}.$

10. $\frac{3-7x}{2x+4}=\frac{1{,}5-3{,}5x}{x+2}.$

11. $\frac{x^2-3}{x}+\frac{6x}{x^2-3}-5=0.$

12. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2.$

13. $x^2+x+\frac{18}{x^2+x+1}=10.$

14. $\frac{10}{x^2-4x+8}-x^2+4x=5.$

15. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$

16. $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{18}{(x-2)^2}=7\left(\frac{x-2}{2}-\frac{3}{x-2}\right)+10.$

17. $\frac{(x+3)^2}{5}+\frac{20}{(x+3)^2}=8\left(\frac{x+3}{5}-\frac{2}{x+3}\right)+1.$

§ 2. Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее выражения с искомой величиной x под радикалом, будем называть *иррациональным.*

При решении таких уравнений нужно учитывать, что выражение под корнем должно быть неотрицательным. Однако в уравнениях вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ в качестве ОДЗ нужно неотрицательной положить только правую часть, т.е. $g(x) \ge 0$.

Примеры

Решить уравнения:

1. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0.$

Решение.

$(x^2-4)\sqrt{x+1}=0 \Rightarrow$ ОДЗ: $x+1\ge 0 \Rightarrow x \ge -1.$

1) $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2,$ но $x=-2 \notin$ ОДЗ.

2) $\sqrt{x+1}=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1.$

Ответ: $x=-2, \quad x=-1.$

2. $x+5\sqrt{x}-6=0.$

Решение.

$x+5\sqrt{x}-6=0.$ Данное уравнение лучше решать заменой $\sqrt{x}=t\ge 0 \Rightarrow t^2+5t-6=0 \Rightarrow t_1=-6, \quad t_2=1.$ Так как $t_1=-6<0 \Rightarrow$ решением уравнения является $t=1 \Rightarrow \quad \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1.$

Ответ: $x=1.$

3. $\sqrt{0{,}5\cdot(x^2-9x+22)}+5=x$.

Решение.

$\sqrt{0{,}5\cdot(x^2-9x+22)}+5=x$. Это уравнение имеет вид

$\sqrt{0{,}5\cdot(x^2-9x+22)}=x-5 \Rightarrow$ ОДЗ: $x-5\ge 0 \Rightarrow x>5. \Rightarrow$

$\frac{1}{2}(x^2-9x+22)=(x-5)^2 \Rightarrow x^2-9x+22=2x^2-20x+50 \Rightarrow x^2-11x+28=0 \Rightarrow$

$x_1=4, \quad x_2=7.$ Но $x_1=4<5 \Rightarrow x=7.$

Ответ: $x=7.$

4. $2\sqrt{(x+2)}+3\sqrt{x^2-3x-10}=0.$

Решение.

$2\sqrt{(x+2)}+3\sqrt{x^2-3x-10}=0.$ Так как оба слагаемых не могут быть отрицательными, то их сумма равна нулю, если только оба слагаемых равны нулю:

$$\begin{cases} x+2=0, \\ x^2-3x-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=-2 \Rightarrow x=-2.$$

Ответ: $x=-2.$

5. $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1.$

Решение.

$$\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1 \Rightarrow \text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x-5\ge 0, \\ 4-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{3} \\ x\le 4 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[\dfrac{5}{3};\quad 4\right].$$

Перенесем $\sqrt{4-x}$ в правую сторону, чтобы обе части были неотрицательны:

$$\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{4-x}\Rightarrow 3x-5=1+2\sqrt{4-x}+4-x\Rightarrow 2\sqrt{4-x}=4x-10\Rightarrow$$

$$\sqrt{4-x}\Rightarrow 2x-5\Rightarrow \text{ ОДЗ: } 2x-5\ge 0,\quad x\ge\frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow 4-x=(2x-5)^2\Rightarrow 4-x=4x^2-20x+25\Rightarrow 4x^2-19x+21=0\Rightarrow$$

$$\Delta=19^2-4\cdot 4\cdot 21=361-336=25\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{19-\sqrt{25}}{8}=\frac{16}{8}=2,\quad x_2=\frac{19+\sqrt{25}}{8}=\frac{24}{8}=3.$$

Следует обратить внимание, что $x_1=2\in\left[\dfrac{5}{3};\quad 4\right]$, но не удовлетворяет неравенству $x\ge\dfrac{5}{2}$. Поэтому $x_1=2-$ посторонний корень.

Ответ: $x=3.$

6. $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}.$

Решение.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}\Rightarrow \text{ ОДЗ: }\begin{cases}x+1\ge 0,\\ 2x-5\ge 0,\\ x-2\ge 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -1,\\ x\ge 5/2\\ x\ge 2\end{cases}\Rightarrow x\ge\frac{5}{2}.$$

Перенесем слагаемое $\sqrt{2x-5}$ в правую часть, чтобы обе части уравнения были неотрицательными:

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-5}\Rightarrow x+1=x-2+2\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2x-5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2-9x+10}=-2x+8\Rightarrow\sqrt{2x^2-9x+10}=4-x\Rightarrow \text{ ОДЗ: } x\le 4\Rightarrow$$

$$2x^2-9x+10=16-8x+x^2\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x_1=-2<\frac{5}{2},\quad x_2=3\in\left[\frac{5}{2};4\right].$$

Ответ: $x=3$.

7. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3.$

Решение.

$\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3\Rightarrow$ ОДЗ: $x-2\ge 0\Rightarrow x\ge 2$. Следует заметить, что при $x\ge 2$ выражения $x-\sqrt{x-2}>0$ и $x+\sqrt{x-2}>0$. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x-\sqrt{x-2}+2\sqrt{(x-\sqrt{x-2})(x+\sqrt{x-2})}+x+\sqrt{x-2}=9$$

$$2\sqrt{(x^2-(x-2))}=9-2x\Rightarrow \text{ ОДЗ: } 9-2x\ge 0\Rightarrow x\le\frac{9}{2}\Rightarrow$$

$$4(x^2-x+2)=81-36x+4x^2\Rightarrow 4x^2-4x+8=81-36x+4x^2\Rightarrow 32x=73\Rightarrow$$

$$x=\frac{73}{32}.$$

Ответ: $x=\frac{73}{32}$.

8. $4x^2+\sqrt{4x^2-6x+5}=6x+7.$

Решение.

$4x^2+\sqrt{4x^2-6x+5}=6x+7.$

Перепишем уравнение следующим образом: $4x^2-6x-7+\sqrt{4x^2-6x+5}=0$. Замена: $\sqrt{4x^2-6x+5}=t\ge 0\Rightarrow$

$t^2=4x^2-6x+5\Rightarrow 4x^2-6x-7=t^2-12\Rightarrow$ Уравнение имеет вид:

$t^2-12+t=0\Rightarrow t_1=-4;\quad t_2=3.$

Так как только $t_2 = 3 \geq 0$, то

$$\sqrt{4x^2 - 6x + 5} = 3 \Rightarrow 4x^2 - 6x + 5 = 9 \Rightarrow 4x^2 - 6x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $\sqrt{15 - x} = 3.$
2. $\sqrt{3x - 8} = 5.$
3. $\sqrt[3]{x - 4} = 3.$
4. $\sqrt{\dfrac{1}{15 - 4x}} = 0{,}2.$
5. $\sqrt{\dfrac{6}{4x - 54}} = \dfrac{1}{7}.$
6. $\sqrt{x - 5} + 0{,}6 = 0.$
7. $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x + 4}.$
8. $\sqrt{3x^2 - 12} = \sqrt{2x^2 + 4}.$
9. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 3} = 0.$
10. $\sqrt{x^2 + 3} = x + 2.$
11. $\sqrt{x^2 - 9} = x - 4.$
12. $\sqrt{x + 4} = \dfrac{1}{3}x + 2.$
13. $\sqrt{-72 - 17x} = -x.$
14. $2\sqrt{x^2 - 2x - 2{,}75} = x - 2.$
15. $\sqrt{x - 7} + \sqrt{3 - x} = 2.$
16. $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x - 6} = 1.$
17. $\sqrt{x - 7} + \sqrt{3 - x} = -8.$
18. $x + \sqrt{x^2 + x - 1} = 2.$
19. $2 + \sqrt{9x^2 + 2x - 3} = 3x.$
20. $1 - 2\sqrt{x^2 + 1} = 2x.$
21. $x - \sqrt{3(7 - 2x)} = 3.$

22. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x+1}.$

23. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}.$

24. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}.$

25. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}.$

26. $\sqrt{3+x}+\sqrt{6+x}=\dfrac{3}{\sqrt{3+x}}.$

27. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{9-x}=\dfrac{6}{\sqrt{9-x}}.$

28. $\sqrt{3x+5}+\sqrt{10-x}=\dfrac{15}{\sqrt{10-x}}.$

29. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}.$

30. $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}=0.$

§ 3. Системы уравнений

Совокупность уравнений вида $\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$ называется *системой двух уравнений с двумя неизвестными* x *и* y.

Здесь $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ – некоторые соотношения между x и y. Уравнение $f_1(x,y)=0$ будем обозначать (1), а уравнение $f_2(x,y)=0$ будем обозначать (2).

Решить систему уравнений – это значит найти значения неизвестных величин x и y, которые превращают уравнения (1) и (2) в тождество.

Уравнения (1) и (2) можно складывать, вычитать и умножать на число.

Примеры

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x+y=4, \\ 3y-2x=4. \end{cases}$

Решение.

Из (1) $y=4-2x \Rightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ 3\cdot(4-2x)-2x=4. \end{cases}$

Решим уравнение (2) относительно x:

$12-6x-2x=4 \Rightarrow 8x=8 \Rightarrow x=1$ и из (1) следует, что $y=2$.

Ответ: $x=1,\ y=2$.

2. $\begin{cases} 5x+7y=13, \\ 2x-5y=-26. \end{cases}$

Решение.

Уравнение (1) умножим на 2, уравнение (2) – на 5$\Rightarrow$

$$\begin{cases} 10x+14y=26, \\ 10x-25y=-130. \end{cases}$$

Из (1) вычтем (2): $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 39y=156, \\ 10x-25y=-130. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4, \\ 10x-25y=-130. \end{cases} \Rightarrow x=-3,\ y=4$$

Ответ: $x=-3,\ y=4$.

3. $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21. \end{cases}$

Решение.

Из (1) $y=10-x \Rightarrow$ из (2),

$x(10-x)=21. \Rightarrow 10x-x^2=21 \Rightarrow x^2-10x+21=0 \Rightarrow$

$x_1=3, \quad x_2=7 \Rightarrow y_1=10-3=7, \quad y_2=10-7=3.$

Ответ: $x_1 = 3$, $y_1 = 7$; $x_2 = 7$, $y_2 = 3$.

4. $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1. \end{cases}$

Решение.

К (1) прибавим (2): $2x+2y=12 \Rightarrow x+y=6.$

К (1) вычтем (2): $2xy=10 \Rightarrow xy=5 \Rightarrow \begin{cases} x+y=6, \\ xy=5. \end{cases}$

Из (1) $y=6-x \Rightarrow$ из (2) $x(6-x)=5 \Rightarrow 6x-x^2=5 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow$

$x_1=1, \quad x_2=5 \Rightarrow y_1=6-1=5, \quad y_2=6-5=1.$

Ответ: $x_1 = 1$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 1$.

5. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^3-y^3=37. \end{cases}$

Решение.

Из (2) имеем $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=37 \Rightarrow$ с учетом (1)

$(x-y)37=37 \Rightarrow (x-y)=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x-y=1. \end{cases} \Rightarrow$

из (2) $x=y+1 \Rightarrow$ из (1)

$(y+1)^2+(y+1)y+y^3=37 \Rightarrow y^2+2y+1+y^2+y+y^2=37 \Rightarrow$

$3y^2+3y-36=0 \Rightarrow y^2+y-12=0 \Rightarrow y_1=-4, y_2=3 \Rightarrow$

$x_1=-4+1=-3; \quad x_2=3+1=4.$

Ответ: $x_1 = -3$, $y_1 = -4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 3$.

6. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2-y^2=8. \end{cases}$

Решение.

Пусть имеем $\frac{x}{y}=a$, тогда (1) имеет вид $a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}\Rightarrow$ $3a^2+3=10a\Rightarrow 3a^2-10a+3=0\Rightarrow a_1=\frac{1}{3},\quad a_2=1.\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1)\ \begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{1}{3},\\ x^2-y^2=8,\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\frac{x}{y}=3,\\ x^2-y^2=8.\end{cases}.$$

Для системы 1) имеем $\begin{cases}3x=y,\\ x^2-(3x)^2=8.\end{cases}\Rightarrow -8x^2=8$ – решений нет, так как $-8x^2\le 0.$

Для системы 2) имеем $\begin{cases}x=3y,\\ x^2-y^2=8.\end{cases}\Rightarrow (3y)^2-y^2=8\Rightarrow\ 8x^2=8\Rightarrow$

$y_{1/2}=\pm 1\Rightarrow x_{1,2}=\pm 3.$

Ответ: $x_1=3,\quad y_1=1;\quad x_2=-3,\quad y_2=-1.$

7. $\begin{cases}xy+6=\frac{7x}{y},\\ 26-\frac{x}{y}=3xy.\end{cases}$

Решение.

Обозначим $xy=a,\quad \frac{x}{y}=b.$ Тогда система имеет вид

$$\begin{cases}a+6=7b,\\ 26-b=3a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=7b-6,\\ 26-b=3(7b-6)\end{cases}\Rightarrow$$

$26-b=21b-18\Rightarrow 22b=44\Rightarrow b=2.$

Тогда

$$a=7\cdot 2-6=8\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}=2,\\ xy=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y,\\ 2y^2=8\end{cases}\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y_{1,2}=\pm 2\Rightarrow x_{1,2}=\pm 4.$$

Ответ: $x_1=4,\quad y_1=2;\quad x_2=-4,\quad y_2=-2.$

8. $\begin{cases}x+y+\frac{x}{y}=\frac{1}{2},\\ \frac{x^2}{y}+x=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решение.

Преобразуем (2) к виду $\dfrac{x^2+xy}{y}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{x(x+y)}{y}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ система имеет вид $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x}{y}(x+y)=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Пусть $x+y=a,\quad \dfrac{x}{y}=b\Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{1}{2}, \\ ab=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}-b, \\ \left(\dfrac{1}{2}-b\right)b=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}b-b^2=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2b^2-b-1=0\Rightarrow$$

$b_1=-\dfrac{1}{2},\quad b_2=1\Rightarrow a_1=1,\quad a_2=-\dfrac{1}{2}.$

$$\Rightarrow 1)\quad \begin{cases} x+y=1, \\ \dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} x-1=-y, \\ 2x=y. \end{cases}\Rightarrow 2x=x-1\Rightarrow x=-1$$

$y=2\Rightarrow\quad x_1=-1,\quad y_1=2.$

$$\Rightarrow 2)\quad \begin{cases} x+y=-\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x}{y}=1, \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} y+y=-\dfrac{1}{2}, \\ x=y \end{cases}\Rightarrow 2y=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow$$

$x=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\quad x_2=-\dfrac{1}{4},\quad y_2=-\dfrac{1}{4}.$

Ответ: $x_1=-1,\quad y_1=2;\quad x_2=-\dfrac{1}{4},\quad y_2=-\dfrac{1}{4}.$

9. $\begin{cases} x^2-5y^2+4xy=0, \\ x^2-8y^2-7xy=52. \end{cases}$

Решение.

Обе части уравнения (1) разделим на $y^2(y\neq 0)$, так как при $y=0\Rightarrow x=0,$ но при $x=y=0$ уравнение (2) имеет вид $0=52$, что неверно.

После деления уравнение (1) имеет вид $\frac{x^2}{y^2}-5+\frac{4x}{y}=0.$ Обозначим $\frac{x}{y}=a \Rightarrow a^2+4a-5=0 \Rightarrow a_1=-5,\quad a_2=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1)\begin{cases} \frac{x}{y}=-5, \\ x^2-8y^2-7xy=52. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5y, \\ (-5y)^2-8y^2-7(-5y)y=52 \end{cases} \Rightarrow$$

$$25y^2-8y+35y^2=52 \Rightarrow 52y^2=52 \Rightarrow y_{1,2}=\pm 1 \Rightarrow x_{1,2}=\mp 5.$$

$$\Rightarrow 2)\begin{cases} \frac{x}{y}=1, \\ x^2-8y^2-7xy=52. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y, \\ y^2-8y^2-7y\cdot y=52 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -14y^2=52 \Rightarrow$ решений нет, так как $\Rightarrow -14y^2 \le 0.$

Ответ: $x_1=-5,\quad y_1=1;\quad x_2=5,\quad y_2=-1.$

10. $\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{10}{3}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}. \end{cases}$

Решение.

Уравнение (2) приведем к виду $\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{4}.$ Здесь есть сумма $(x+y)$ и произведение xy. Сделаем так , чтобы и в уравнении (1) были эти комбинации:

$$\frac{10}{3}=\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x^2+2xy+y^2-2xy}{x+y}=\frac{(x+y)^2-2xy}{x+y}=x+y-\frac{2xy}{x+y}.$$

Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} x+y-\frac{2xy}{x+y}=\frac{10}{3}, \\ \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2\frac{4}{3}=\frac{10}{3}, \\ \frac{xy}{x+y}=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}, \\ \frac{xy}{x+y}=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=6, \\ \frac{xy}{6}=\frac{4}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=6, \\ xy=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y, \\ (6-y)y=8 \end{cases} \Rightarrow 6y-y^2=8 \Rightarrow y^2-6y+8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1=2,\ y_2=4 \Rightarrow x_1=4,\ x_2=2.$$

Ответ: $x_1=4,\quad y_1=2;\quad x_2=2,\quad y_2=4.$

11. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2 y + y^2 x = 20. \end{cases}$

Решение.

Возведем в квадрат обе части уравнения (1): $x^2 y + y^2 x + 2xy\sqrt{xy} = 36.$ Тогда, с учетом уравнения (2), имеем $20 + 2xy\sqrt{xy} = 36 \Rightarrow 2\sqrt{(xy)^3} = 16 \Rightarrow (xy)^3 = 64 \Rightarrow xy = 4.$ Это уравнение и уравнение (2) образуют систему

$$\begin{cases} xy = 4, \\ xy(x+y) = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5-y)y = 4, \\ x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$5y - y^2 = 4 \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 4, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 4.$

Задачи для самостоятельного решения

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 3x - y = -1 \\ -x + 2y = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + y = 10 \\ x + 3y = -3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 4y = 18 \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x - y = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x^3 - y^3 = 37. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 42 \\ (x-5)(y+4) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 y + y^2 x = 20 \\ x^3 + y^3 = 65. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{y}{x+1} \\ x^2 + 2y + 1 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y - xy = 14 \\ x + 2y + xy = -7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \\ x - y = -1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0 \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18 \\ x + y = 12. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9 \\ x - 1 = \left(\sqrt{x} + 1\right)y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 61 \\ x + y - \sqrt{xy} = 7. \end{cases}$

§ 4. Показательные уравнения

Уравнение, содержащее переменную x в показателе степени, называется *показательным.*

Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1,$ равносильно уравнению $f(x) = g(x).$

При решении показательных уравнений необходимо учитывать, что $a^{f(x)} > 0.$

Имеются два основных метода решения показательных уравнений:

1. Метод уравнивания показателей, т.е. преобразование заданного уравнения к уравнению вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, а затем к виду $f(x) = g(x).$

2. Метод введения новой переменной.

3. Графический метод.

Примеры

Решить уравнения:

1. $5^{x+7} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+3}$.

Решение.

$$5^{x+7} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} \Rightarrow 5^{x+7} = 5^{-x-3} \Rightarrow \quad x+7 = -x-3 \Rightarrow \quad 2x = -10 \Rightarrow \quad x = -5.$$

Ответ: $x = -5$.

2. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4} \Rightarrow \quad (2)^{(-3)\cdot\frac{2x^2}{3}} = 2^{-2x} \cdot 2^{-12} \Rightarrow \quad -2x^2 = -2x - 12 \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$x_1 = -2, \quad x_2 = 3.$

Ответ: $x_1 = -2; \quad x_2 = 3$.

3. $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 3^{x+2} + 3^x$.

Решение.

$$7^{x+1}+3\cdot 7^x=3^{x+2}+3^x \Rightarrow \quad 7\cdot 7^x+3\cdot 7^x=9\cdot 3^x+3^x \Rightarrow \quad 10\cdot 7^x=10\cdot 3^x \Rightarrow$$

$$7^x=3^x \Rightarrow \quad \frac{7^x}{3^x}=1 \Rightarrow \quad \left(\frac{7}{3}\right)^x=\left(\frac{7}{3}\right)^0 \Rightarrow x=0.$$

Ответ: $x = 0$.

4. $6^{x-2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-1}{2}}=246$.

Решение.

$$6^{x-2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-1}{2}}=246 \Rightarrow \quad 6^{x-2}-6^{x-3}+6^{2\cdot\frac{x-1}{2}}=41\cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{36}\cdot 6^x-\frac{1}{216}\cdot 6^x+\frac{1}{6}6^x=41\cdot 6 \Rightarrow \quad 6^x\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{216}+\frac{1}{6}\right)=41\cdot 6 \Rightarrow$$

$$6^x\cdot\left(\frac{6-1+36}{216}\right)=41\cdot 6 \Rightarrow \quad 6^x\cdot\frac{41}{216}=41\cdot 6 \Rightarrow \quad 6^x=6\cdot 216 \Rightarrow \quad 6^x=6^4 \Rightarrow x=4.$$

Ответ: $x=4$.

5. $3\cdot 2^x+4^x=10$.

Решение.

$3\cdot 2^x+4^x=10 \Rightarrow 3\cdot 2^x+2^{2x}=10 \Rightarrow \quad 3\cdot 2^x+(2^x)^2=10$

Замена: $2^x=t>0 \Rightarrow 3t+t^2=10 \Rightarrow t^2+3t-10=0 \Rightarrow t_1=-5, \quad t_2=2.$

Но $t_1=-5$ – посторонний корень, так как $t>0 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1.$

Ответ: $x=1$.

6. $3\cdot 9^{x^2+1}-5\cdot 3^{x^2+2}+18=0$.

Решение.

$3\cdot 9^{x^2+1}-5\cdot 3^{x^2+2}+18=0 \Rightarrow 3\cdot 9\cdot 9^{x^2}-5\cdot 3^2\cdot 3^{x^2}+18=0 \Rightarrow$

$3\cdot 9^{x^2}-5\cdot 3^{x^2}+2=0 \Rightarrow \quad 3\cdot (3^{x^2})^2-5\cdot 3^{x^2}+2=0 \Rightarrow$

Замена: $3^{x^2}\geq 1!!! \Rightarrow 3t^2-5t+2=0 \Rightarrow t_1=\frac{2}{3}, \quad t_2=1.$

Но $t_1=\frac{2}{3}$ – посторонний корень, так как $t>1 \Rightarrow 3^{x^2}=1 \Rightarrow 3^{x^2}=3^0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0.$

Ответ: $x=0$.

7. $4^{x+3}-(0{,}25)^{x+1}=15$.

Решение.

$$4^{x+3}-(0{,}25)^{x+1}=15\Rightarrow 4^3\cdot 4^x-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=15\Rightarrow 256\cdot 4^x-4^{-x}=60\Rightarrow$$

Замена: $4^x=t>0\Rightarrow 256t-\frac{1}{t}=60\Rightarrow 256t^2-60t-1=0\Rightarrow t_1=-\frac{1}{64},\quad t_2=\frac{1}{4}.$

Но $t_1=-\frac{1}{64}$ – посторонний корень, так как $t>0\Rightarrow t=\frac{1}{4}\Rightarrow 4^x=\frac{1}{4}\Rightarrow 4^x=4^{-1}\Rightarrow x=-1.$

Ответ: $x=-1$.

8. $\frac{2}{5^{x-1}}^{\ x}+3=\frac{5^x}{2^{x-1}}$.

Решение.

$$\frac{2}{5^{x-1}}^{\ x}+3=\frac{5^x}{2^{x-1}}\quad\Rightarrow\quad\frac{5\cdot 2^x}{5^x}+3=\frac{2\cdot 5^x}{2^x}\quad\Rightarrow\quad 5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x+3=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x.$$

Замена:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^x=t>0\Rightarrow\frac{5}{t}+3=2t\quad\Rightarrow\quad 2t^2-3t-5=0\quad\Rightarrow\quad t_1=-1,\quad t_2=\frac{5}{2}.$$

Но $t_1=-1$ – посторонний корень, так как $t>0\Rightarrow t=\frac{5}{2}\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x=\frac{5}{2}\Rightarrow x=1.$

Ответ: $x=1$.

9. $9^x+6^x-2\cdot 4^x=0$.

Решение.

$$9^x+6^x-2\cdot 4^x=0\quad\Rightarrow\quad 3^{2x}+(2\cdot 3)^x-2\cdot 2^{2x}=0\quad\Rightarrow$$

$$(3^x)^2+2^x\cdot 3^x-2\cdot(2^x)^2=0.$$

Разделим обе части уравнения на $(2^x)^2\neq 0$:

$$\left(\frac{3^x}{2^x}\right)^2+\left(\frac{3^x}{2^x}\right)-2=0\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0.$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет вид $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2, t_2 = 1.$

Но $t_1 = -2$ – посторонний корень, так как $t > 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$

Ответ: $x = 0.$

10. $2^{4x} - 7 \cdot 4^x \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} = 0$.

Решение.

$$2^{4x} - 7 \cdot 4^x \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4^{2x} - \frac{7}{3} \cdot 4^x \cdot 3^x + \frac{4}{3} \cdot 3^{2x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3 \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 4^x \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $3^{2x} \Rightarrow$

$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 4 = 0$ Замена: $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет вид

$$3t^2 - 7t + 4 = 0 \Rightarrow \quad t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{4}{3}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{3}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{3}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0, \quad x = 1.$

11. $8^x + 8 = 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+1}.$

Решение.

$$8^x + 8 = 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+1} \quad \Rightarrow \quad 2^{3x} + 8 - 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2 \cdot 2^x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(2^x)^3 + 2^3 - 3 \cdot 2^x \cdot (2^x + 2) = 0 \quad \Rightarrow (2^x + 2)(2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 4) - 3 \cdot 2^x (2^x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$(2^x + 2)(2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 4 - 3 \cdot 2^x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2^x + 2\right) = 0 \text{ или } 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Уравнение $(2^x + 2 = 0)$ не имеет решений, так как $2^x > 0$.

Для решения уравнения $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ сделаем замену: $(2)^x = t > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет вид $t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 4. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} (2)^x = 1, \\ (2)^x = 4. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0, \quad x = 2.$

12. $12 + x \cdot 2^x - 6 \cdot x = 2 \cdot 4^x - x \cdot 4^x + 2 \cdot 2^x$.

Решение.

$12 + x\cdot 2^x - 6\cdot x = 2\cdot 4^x - x\cdot 4^x + 2\cdot 2^x \Rightarrow 12 - 6\cdot x = 2\cdot 4^x - x\cdot 4^x + 2\cdot 2^x - x\cdot 2^x \Rightarrow$

$6\cdot(2-x) = 4^x\cdot(2-x) + 2^x\cdot(2-x) \Rightarrow (2-x)\cdot(4^x + 2^x - 6) = 0 \Rightarrow$

$2 - x = 0,$ или $4^x + 2^x - 6 = 0 \Rightarrow$

Если $2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 2$.

Если $4^x + 2^x - 6 = 0,$ то заменим $2^x = t > 0 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = -3$ – посторонний корень, $t_2 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x_2 = 1.$

Ответ: $x = 1, \quad x = 2.$

13. $81^x - 16^x - 2\cdot(9^x - 4^x)\cdot 9^x + 36^x = 0$.

Решение.

$81^x - 16^x - 2\cdot(9^x - 4^x)\cdot 9^x + 36^x = 0 \Rightarrow 9^{2x} - 4^{2x} - 2\cdot 9^{2x} + 2\cdot 4^x\cdot 9^x + 4^x\cdot 9^x = 0 \Rightarrow$

$-9^{2x} + 3\cdot 4^x\cdot 9^x - 4^{2x} = 0 \Rightarrow$ разделим обе части уравнения на -4^{2x}:

$\left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 3\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^{x} + 1 = 0$. Замена: $\left(\frac{9}{4}\right)^{x} = t > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow$

$t_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{x} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Прологарифмируем обе части по основанию $\frac{9}{4}$: $\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)^{x} = \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow x = \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ответ: $x = \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $5^{x^2+6x+8} = 1.$
2. $\left(\frac{2}{5}\right)^{6x-7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{14x-3}.$
3. $0{,}125\cdot 2^{-4x-16} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{x}.$
4. $2^{3+2x} = 4^{1-x^2-3x}.$
5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{4\sqrt{x}} = (2{,}25)^{2\sqrt{x}-4}.$
6. $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17.$

7. $2^x \cdot 5^{x-1} = 200$.

8. $2^{x^2-6} \cdot 3^{x^2-6} = \dfrac{\left(6^{-x-1}\right)^4}{6^5}$.

9. $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 9^x$.

10. $64 \cdot 9^{-x} - 84 \cdot 12^{-x} + 27 \cdot 16^{-x} = 0$.

11. $3^{-12x-1} - 9^{-6x-1} - 27^{-4x-1} + 81^{1-3x} = 2192$.

12. $5^{x+1} = 5^{x-1} + 24$.

13. $3^{2x-1} - 9^x + 27^{\frac{2x+2}{3}} = 675$.

14. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

15. $4^{-\frac{2}{x}} - 5 \cdot 2^{-\frac{2}{x}} + 4 = 0$.

16. $2^{x+1} \cdot 5^x = 10^{x+1} \cdot 5^{x+2}$.

17. $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$, выбрать корни из промежутка $\left(1; \dfrac{7}{3}\right)$.

18. $4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$, выбрать корни из отрезка $[-1; 2]$.

19. $7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0$, выбрать корни из отрезка [–1; 2].

§ 5. Логарифм положительного числа по заданному основанию

Логарифмом положительного числа b по основанию $a\,(a>0, a\neq 1)$ называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получилось число b: $a^{\log_a b}=b$.

Равенство $\log_a b=c$ означает, что $a^c=b$. Например, $\log_3 81=4$, так как $3^4=81$; $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=-\frac{1}{2}$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

Из определения логарифма следуют важные равенства:

$$\log_a 1=0,$$
$$\log_a a=1.$$

Вообще имеет место равенство $\log_a a^r=r$.

В записи $\log_a b$ число a – *основание логарифма*, b – *логарифмируемое число*.

Свойства логарифмов

1. $\log_a b\cdot c=\log_a b+\log_a c$,
2. $\log_a \dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$,
3. $\log_a b^p = p\cdot\log_a b$,
4. $\log_a b=\dfrac{\log_d b}{\log_d a}$,
5. $\log_{a^p} b=\dfrac{1}{p}\cdot\log_a b$,
6. $\log_a b=\log_{a^k} b^k$,
7. $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$,
8. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$,
9. $\log_a b\cdot\log_d c=\log_d b\cdot\log_a c$,
10. $\log_{a^q} b^p=\dfrac{p}{q}\log_a b$.

Замечание. Если $a=10$, то логарифм называется *десятичным*, вместо записи $\log_{10} b$ принято записывать $\lg b$.

Если $a=e$, то логарифм называется *натуральным*, вместо записи $\log_e b$ принято записывать $\ln b$.

Примеры

Вычислить:

1. $\log_2 27 - 2\cdot\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$.

Решение.

$$\log_2 27 - 2\cdot\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 27 - \log_2 3^2 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 \frac{27}{9} + \log_2 \frac{2}{3} =$$

$$\log_2 3\cdot\frac{2}{3} = \log_2 2 = 1.$$

Ответ: 1.

2. $\log_2 \log_4 \log_8 64$.

Решение.

$$\log_2 \log_4(\log_8 64) = \log_2 \log_4(2) = \log_2 \frac{1}{2} = -1.$$

Ответ: –1.

3. $(64)^{\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{5\sqrt{5}}}$.

Решение.

$$(64)^{\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{5\sqrt{5}}} = (64)^{\log_{\frac{1}{8}} 5^{-\frac{3}{2}}} = (64)^{-\log_{8^{-1}} 5^{\frac{3}{2}}} = (8^2)^{\log_8 5^{\frac{3}{2}}} = 8^{2\cdot\log_8 5^{\frac{3}{2}}} =$$

$$8^{\log_8 (5^{\frac{3}{2}})^2} = 8^{\log_8 5^3} = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

4. $\left(\lg 2^{3\cdot\log_2 10}\right)^3$.

Решение.

$$\left(\lg 2^{3\cdot\log_2 10}\right)^3 = \left(\lg 2^{\log_2 10^3}\right)^3 = \left(\lg 2^{\log_2 10^3}\right)^3 = \left(\lg 10^3\right)^3 = (3\cdot\lg 10)^3 = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

5. $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

Решение.

$$\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}} = \sqrt{10^2\cdot 10^{\frac{1}{2}\lg 16}} = \sqrt{100\cdot 10^{\lg\sqrt{16}}} = \sqrt{100\cdot 4} = 20.$$

Ответ: 20.

6. $\sqrt[4]{25^{-3\cdot\log_{\sqrt{5}} 0.1}}+64^{\log_4 5}$.

Решение.

$$\sqrt[4]{25^{-3\cdot\log_{\sqrt{5}} 0.1}}+64^{\log_4 5}=\sqrt[4]{25^{-3\cdot\log_{5^{1/2}} 10^{-1}}}+4^{3^{\log_4 5}}=\sqrt[4]{25^{6\cdot\log_5 10}}+4^{\log_4 125}=$$

$$\sqrt[4]{5^{12\cdot\log_5 10}}+125=\sqrt[4]{10^{12}}+125=10^3+125=1125.$$

Ответ: 1125.

7. $16(\log_9 45-1)\cdot\log_{11} 9\cdot\log_5 121$.

Решение.

$$16\cdot(\log_9 45-1)\cdot\log_{11} 9\cdot\log_5 121=16\cdot(\log_9 45-\log_9 9)\log_{11} 9\cdot\log_5 11^2=$$

$$=16\cdot\left(\log_9\frac{45}{9}\right)\log_{11} 9\cdot 2\cdot\log_5 11=32\cdot\log_9 5\cdot\log_{11} 9\cdot\log_5 11=$$

$$=32\cdot\log_9 5\cdot\frac{1}{\log_9 11}\cdot\frac{\log_9 11}{\log_9 5}=32.$$

Ответ: 32.

8. $\dfrac{\log_2 66}{\log_6 66}-\log_2 3$.

Решение.

$$\frac{\log_2 66}{\log_6 66}-\log_2 3=\frac{\log_6 66}{\log_6 2\log_6 66}-\log_2 3=\log_2 6-\log_2 3=\log_2\frac{6}{3}=1.$$

Ответ: 1.

9. $20^{\frac{1}{2\log_{81} 5}}\cdot(0{,}25)^{\frac{1}{2\log_{81} 5}}$.

Решение.

$$20^{\frac{1}{2\log_{81} 5}}\cdot(0{,}25)^{\frac{1}{2\log_{81} 5}}=(20\cdot 0{,}25)^{\frac{1}{\log_9 5}}=5^{\frac{1}{\log_9 5}}=5^{\log_5 9}=9.$$

Ответ: 9.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

1. $9^{\log_3 5}$.
2. $\log_{3.8} 10\cdot\lg(\sqrt[5]{3.8})$.
3. $\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.
4. $9^{2\log_{16} 2+\log_3\sqrt{5}}$.

5. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{25}}\right)^{-\frac{20}{3}} + \log_4 9 \log_3 4 - 7^{\log_{\sqrt{7}} 3}$.

6. $\left(\dfrac{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[5]{3}}\right)^{\frac{20}{13}} + \log_8 32 + \log_2 \sqrt[3]{2}$.

7. $\left(15 + 3^{1+\log_3 9}\right)\cdot \log_2 \sqrt{3}\cdot \log_3 4$.

8. $\left(30 - 5^{1+\log_5 4}\right)\cdot \log_2 \sqrt{5}\cdot \log_5 4$.

9. $\log_{7,3} \sqrt[5]{8} : \log_{7,3} \sqrt[20]{8}$.

10. $\log_6 34 - \log_6 17 + \log_6 18$.

11. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

12. $49^{0.5(\log_7 9 - \log_7 6)} - 16\cdot 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}$.

13. $\left(\dfrac{\log_{0.4} \log_9 243 + 8^{4\log_{16} 3}}{\log_7 196 - 2\log_7 2}\right)$.

§ 6. Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее переменную x под знаком логарифма, называется *логарифмическим.*

При решении уравнений с логарифмами нужно помнить, что выражение под логарифмом должно быть положительным, а основание – положительным и не равным единице.

Простейшее *логарифмическое* уравнение имеет вид $\log_a f(x) = \log_a g(x),$ где $a > 0, a \neq 1.$

Чтобы решить простейшее логарифмическое уравнение, нужно:

1) решить уравнение $f(x) = g(x);$

2) из найденных корней отобрать те, которые удовлетворяют неравенствам $f(x) > 0$ и $g(x) > 0,$ остальные корни уравнения $f(x) = g(x)$ являются посторонними для уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x).$

Имеется два основных метода решения логарифмических уравнений:

1) метод преобразования к уравнению вида $\log_a f(x) = \log_a g(x),$ а затем к виду $f(x) = g(x);$

2) метод введения новой переменной.

Примеры

Решить уравнения:

1. $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 3-x>0, \\ 1-x>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3, \\ x<1. \end{cases} \Rightarrow x<1.$

$\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(3-x)(1-x) = 3 \Rightarrow (3-x)(1-x) = 2^3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, \quad x_2 = -1.$

Но $x_1 = 5$ – посторонний корень, так как по ОДЗ $x < 1$.

Ответ: $x = -1$.

2. $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x-7}{x-1} + \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} = 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \dfrac{x-7}{x-1} > 0, \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (7;\infty), \\ x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty). \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (7;\infty).$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1 \Rightarrow 2\log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\log_2 \left(\frac{x-7}{x-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \Rightarrow \frac{(x-7)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1} = 2^1 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-7)^2}{(x-1)^2(x+1)} = 2 \Rightarrow (x-7)^2 = 2(x^2-1) \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = x^2 - 14x + 49 = 2x^2 - 2 \Rightarrow$$

$x^2 + 14x - 51 = 0 \Rightarrow x_1 = -17, \quad x_2 = 3.$ Но $x_2 = 3$ – посторонний корень.

Ответ: $x = -17$.

3. $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 \sqrt{x} = 2$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 \sqrt{x} = 2 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 x = 2 \Rightarrow$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0.$$

Пусть $\log_2 x = t \Rightarrow$ Уравнение имеет вид $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1; \quad t_2 = 2 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2}; \quad x_2 = 4$.

4. $\log_2 x - 4\log_{x^2} 4 = 3$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 \neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\log_2 x - 4\log_{x^2} 4 = 3 \Rightarrow \log_2 x - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\log_x 2 = 3 \Rightarrow \log_2 x - \frac{4}{\log_2 x} = 3.$$

Пусть $\log_2 x = t \Rightarrow$ Уравнение имеет вид

$$t-\frac{4}{t}=3 \Rightarrow t^2-3t-4=0 \Rightarrow t_1=-1, \quad t_2=4. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1, \\ \log_2 x=4.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}; \\ x=16.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}; \quad x_2=16$.

5. $\dfrac{\log_{27}\frac{27}{x^2}}{\log_{27}^2 x}=3$.

Решение.

ОДЗ: $x>0, \quad x \neq 1$

$$\frac{\log_{27}\frac{27}{x^2}}{\log_{27}^2 x}=3 \Rightarrow \log_{27}27-\log_{27}x^2=3\log_{27}^2 x \Rightarrow 1-2\log_{27}x=3\log_{27}^2 x.$$

Пусть $\log_2 x=t \Rightarrow$ уравнение имеет вид

$$3t^2+2t-1=0 \Rightarrow t_1=-1; \quad t_2=\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_{27} x=-1 \\ \log_{27} x=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{27}, \\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{27}; \quad x_2=3.$

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $\log_5\left(\frac{x+1}{10}\right)=\log_5\left(\frac{2}{x}\right)$.
2. $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=1$.
3. $\frac{\log_2 5}{\log_2 10}+\lg(x+10)=1+\lg(21x-20)-\lg(2x-1)$.
4. $2\log_4(4+x)=4-\log_2(x-2)$.
5. $\log_3((x+2)(x-2))=4\log_9(2x+3)-\log_{\sqrt{5}}5$.
6. $2\log_8(2x)+\log_8(x^2-2x+1)=\frac{4}{3}$.

7. $2\log_8 2^{4x} = 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}$.

8. $10^{\lg(\lg\sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.

9. $\log_{1-x}(x^2 - x - 6)^2 = 4$.

10. $(\lg x)^2 - 4\lg x = \lg x^2 - 5$.

11. $\log_2 \dfrac{x}{8} = \dfrac{15}{\log_2 \dfrac{x}{16} - 1}$.

12. $\lg^{-1} x + 4\lg x^2 + 9 = 0$.

13. $2\log_{12}\left(x + \dfrac{6}{x-5}\right) = \log_{12}\left(\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{2}{x-3}\right) + 3$.

14. $\sqrt{13 + \dfrac{4}{\log_x 3}} = 2\log_3\left(3\sqrt{x}\right)$.

15. $\log_{81}(15 - 7x)\cdot\log_{3-x} 9 = 1$.

Уравнения с выборкой корней

1. $27^x - 5\cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0$, выбрать корни из отрезка $[\log_3 4; \log_3 10]$.

2. $8^x - 7\cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0$, выбрать корни из отрезка $[\log_2 5; \log_2 11]$.

3. $3\cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7\cdot 6^x + 3\cdot 4^{x+1} = 0$, выбрать корни из отрезка $[2;3]$.

4. $5\cdot 4^{x^2+4x} + 20\cdot 10^{x^2+4x+1} - 7\cdot 25^{x^2+4x} = 0$, выбрать корни из отрезка $[-3; 1]$.

5. $19\cdot 4^x - 5\cdot 2^{x+2} + 1 = 0$, выбрать корни из отрезка $[-5;-4]$.

6. $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$, выбрать корни из отрезка $[2;\sqrt{10}]$.

7. $9^x - 3^{x+2} + 14 = 0$, выбрать корни из отрезка $[1;\sqrt{5}]$.

8. $8^x - 9\cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0$, выбрать корни из отрезка $[\log_5 2; \log_5 20]$.

9. $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4 + 14}$, выбрать корни из отрезка $\left[-1; \dfrac{8}{9}\right]$.

10. $\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4$, выбрать корни из отрезка $\left[\log_9 \dfrac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

11. $6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0$, выбрать корни из отрезка $[2;2,5]$.

12. $\log_2(x^2 - 4x) = 5$, выбрать корни из отрезка $[\log_3 0,1; 5\sqrt{10}]$.

13. $\log_2^2(x^2) - 16\log_2(2x) + 31 = 0$, выбрать корни из отрезка $[3;6]$.

14. $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 31 = \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 + x^2$.

§ 7. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

Пусть на координатной плоскости дана окружность с центром в точке $O=(0;0)$ и радиусом, равным единице (рис. 1). Будем такую окружность называть единичной.

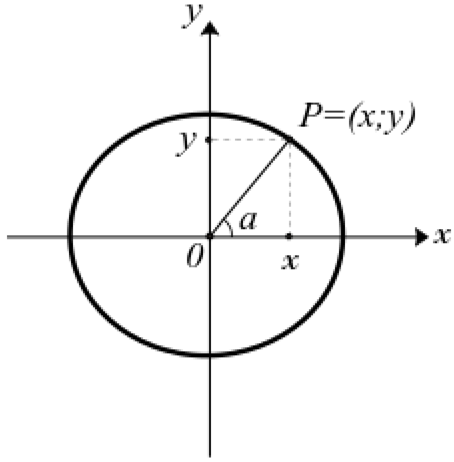


Рис. 1. Единичная окружность

Пусть PO – отрезок, длина которого равна единице (как радиуса единичной окружности). Обозначим через α угол между отрезком PO и положительным направлением оси Ox.

Точка P, как точка плоскости, имеет две координаты: абсциссу x и ординату y (см. рис. 1). Очевидно, что они зависят от угла α.

Определение. Абсцисса x точки $P=(x;y)$ единичной окружности называется косинусом угла α $(x=\cos\alpha)$.

Ордината y точки $P=(x;y)$ единичной окружности называется синусом угла α $(y=\sin\alpha)$.

Из определения следует, что:

1) если P – точка I четверти, то $\cos\alpha>0$ и $\sin\alpha>0$;

2) если P – точка II четверти, то $\cos\alpha<0$, а $\sin\alpha>0$;

3) если P – точка III четверти, то $\cos\alpha<0$ и $\sin\alpha<0$;

4) если P – точка IV четверти, то $\cos\alpha>0$, а $\sin\alpha<0$.

1. Свойства тригонометрических функций:

$$\sin(-x)=-\sin x,$$
$$\cos(-x)=\cos x,$$

$$tg(-x) = -tgx,$$
$$ctg(-x) = -ctgx,$$
$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x,\ k \in Z,$$
$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x,\ k \in Z,$$
$$tg(x + \pi k) = tgx,\ k \in Z,$$
$$ctg(x + \pi k) = ctgx,\ k \in Z.$$

2. Таблица значений тригонометрических функций.

Функция	Аргумент							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Связь между градусной и радианной мерами измерения угла:

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад.

3. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha},$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

5. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

6. Формулы сложения аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}.$$

7. Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$$

8. Знаки тригонометрических функций по четвертям.

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
$tg\alpha$	+	–	+	–
$ctg\alpha$	+	–	+	–

9. Формулы приведения.

Функция	Аргумент t							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tgt	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctgt$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Примеры

1. Вычислить $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение.

Используя формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, имеем:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{49}, = \frac{48}{49} \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{48}{49}} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (II четверть), то $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{7} : \left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \Rightarrow ctg\alpha = -4\sqrt{3}.$$

Ответ: $-\frac{4\sqrt{3}}{7}; -\frac{1}{4\sqrt{3}}; -4\sqrt{3}$.

2. Вычислить $\sin\alpha, \cos\alpha, ctg\alpha$, если $tg\alpha = -7$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение.

Используя формулу $ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, имеем:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}.$$

Так как $tg\alpha = -7,$ то $tg\alpha = -\frac{1}{7}, \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}} = \pm\frac{7}{5\sqrt{2}} = \pm\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

Из того, что $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2};\pi\right)$ (IV четверть), то $\sin\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10}. \Rightarrow \cos^2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{98}{100}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{10}$.

В IV четверти $\cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $-\frac{7\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{1}{7}$.

3. Вычислить $\frac{tg(\alpha - 0{,}5\pi) - ctg(\pi - \alpha) + \cos(\alpha - 1{,}5\pi)}{\sin(\pi + \alpha)}$.

Решение.

Используя формулы (1) и (9), имеем:

$tg(\alpha - 0{,}5\pi) = -tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -tg\alpha;$

$ctg(\pi - \alpha) = -ctg\alpha;$

$\cos(\alpha - 1{,}5\pi) = \cos(1{,}5\pi - \alpha) = \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha;$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$

Подставляя в исходное выражение, получаем:

$$\frac{tg(\alpha - 0{,}5\pi) - ctg(\pi - \alpha) + \cos(\alpha - 1{,}5\pi)}{\sin(\pi + \alpha)} = \frac{-ctg\alpha + ctg\alpha - \sin\alpha}{-\sin\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

4. Упростить выражение $\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \sin(\alpha - \pi)} - \frac{\cos(\alpha - 3\pi)}{1 - \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$.

Решение.

Используя формулы (1) и (9), имеем:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;$$
$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha;$$
$$\cos(\alpha-3\pi)=\cos(3\pi-\alpha)=\cos(2\pi+\pi-\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha;$$
$$\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Подставляя в исходное выражение, получаем:

$$\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\sin(\alpha-\pi)}-\frac{\cos(\alpha-3\pi)}{1-\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=$$
$$=\cos\alpha\left(\frac{1}{1+\sin\alpha}+\frac{1}{1-\sin\alpha}\right)=\cos\alpha\left(\frac{1-\sin\alpha+1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}\right)=$$
$$=\frac{2\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{\cos\alpha}$.

5. Найти $tg\alpha$, если $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=1.$

Решение.

Из условия задачи $\cos\alpha\neq 0,$ так как $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Следовательно, дробь $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}$ можно сократить на $\cos\alpha\neq 0$:

$$\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=\frac{2tg\alpha-1}{tg\alpha-2}.$$

Поэтому задачу можно сформулировать так: найти $tg\alpha$, если $\frac{2tg\alpha-1}{tg\alpha-2}=1.$

Из последнего выражения имеем, что $2tg\alpha-1=tg\alpha-2\Rightarrow tg\alpha=-1.$

Ответ: –1.

6. Вычислить $\frac{\sin^2 7^\circ-\cos^2 187^\circ}{0{,}5\cos 14^\circ}$.

Решение.

Используя формулы (9), имеем:

$$\frac{\sin^2 7^\circ - \cos^2 187^\circ}{0{,}5\cos 14^\circ} = \frac{\sin^2 7^\circ - \cos^2(180^\circ + 7^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ)} =$$

$$= \frac{2(\sin^2 7^\circ - \cos^2 7^\circ)}{(\cos^2 7^\circ - \sin^2 7^\circ)} = -2.$$

Ответ: –2.

7. Вычислить $\frac{5\cos 70^\circ - \sin 160^\circ}{\cos 110^\circ}$.

Решение.

Используя формулы (9), имеем:

$$\frac{5\cos 70^\circ - \sin 160^\circ}{\cos 110^\circ} = \frac{5\cos 70^\circ - \sin(90^\circ + 70^\circ)}{\cos(180^\circ - 70^\circ)} = \frac{5\cos 70^\circ - \cos 70^\circ}{-\cos 70^\circ} =$$

$$= -\frac{4\cos 70^\circ}{\cos 70^\circ} = -4.$$

Ответ: –4.

8. Вычислить $\sin 16^\circ + \cos 16^\circ tg 37^\circ$.

Решение.

Используя формулы (3) и (4), имеем:

$$\sin 16^\circ + \cos 16^\circ tg 37^\circ = \sin(90^\circ - 74^\circ) + \cos(90^\circ - 74^\circ) tg 37^\circ =$$

$$= \cos 74^\circ + \sin 74^\circ tg 37^\circ = \cos 74^\circ + 2\sin 37^\circ \cos 37^\circ \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} =$$

$$= \cos 74^\circ + 2\sin^2 37^\circ = \cos^2 37^\circ - \sin^2 37^\circ + 2\sin^2 37^\circ$$

$$= \cos^2 37^\circ + \sin^2 37^\circ = 1.$$

Ответ: 1.

9. Вычислить $\frac{\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{19\pi}{18}} + \frac{2\sin\frac{5\pi}{14}}{\cos\frac{8\pi}{7}}$.

Решение.

Используя формулы (9), имеем:

$$\cos\frac{4\pi}{9} = \cos\frac{8\pi}{18} = \cos\left(\frac{9\pi}{18} - \frac{\pi}{18}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}\right) = \sin\frac{\pi}{18};$$

$$\sin\frac{19\pi}{18}=\sin\left(\frac{18\pi}{18}+\frac{\pi}{18}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{18}\right)=-\sin\frac{\pi}{18};$$

$$\sin\frac{5\pi}{14}=\sin\left(\frac{7\pi}{14}-\frac{2\pi}{14}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{7};$$

$$\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\frac{7\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{18}\right)=-\cos\frac{\pi}{7};$$

Подставляя в исходное выражение, получаем:

$$\frac{\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{19\pi}{18}}+\frac{2\sin\frac{5\pi}{14}}{\cos\frac{8\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{18}}{-\sin\frac{\pi}{18}}+\frac{2\cos\frac{\pi}{7}}{-\cos\frac{\pi}{7}}=-1-2=-3.$$

Ответ: –3.

Задачи для самостоятельного решения

Вычисления и преобразования

1. Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

2. Найдите значение выражения $36\sqrt{6}tg\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{12}{\sin^2 27^\circ+\cos^2 207^\circ}$.

5. Найдите значение выражения $\frac{2\sin(\alpha-7\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\alpha+\pi)}$.

6. Найдите $tg\alpha,$ если $\frac{7\sin\alpha+13\cos\alpha}{5\sin\alpha-17\cos\alpha}=3$.

7. Найдите значение выражения $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.

8. Найдите $\sin\alpha,$ если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha\in(\pi;2\pi)$.

9. Найдите значение выражения $2tg15^\circ\cdot tg105^\circ$.

10. Найдите значение выражения $\frac{22}{\cos^2 34^\circ+\cos^2 124^\circ}$.

11. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

12. Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

13. Найдите значение выражения $\frac{2\cos 28^\circ}{\cos 152^\circ}$.

14. Найдите значение выражения $\sqrt{200}\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sqrt{50}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{4\sin 17^\circ\cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.

16. Найдите $tg\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

17. Найдите значение выражения $-50tg\,27^\circ\cdot tg117^\circ$.

18. Найдите $\frac{5\sin 4\alpha}{3\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha=0{,}6$.

19. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

20. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{91}}{10}$ и $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

21. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

22. Найдите значение выражения $\frac{48\sin 386^\circ}{\sin 26^\circ}$.

23. Найдите значение выражения $-18\sqrt{3}tg\,390^\circ$.

24. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $270^\circ<\alpha<360^\circ$.

§ 8. Тригонометрические уравнения

Простейшим тригонометрическим уравнением называется уравнение вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$ где a – некоторое действительное число. Решаются они проще всего с помощью единичной окружности. Разберем несколько примеров.

Примеры

Решить уравнения:

1. $2\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$.

Решение.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение можно переписать как

$$2(1 - \sin^2 x) + 7\sin x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$-2\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \Rightarrow$$

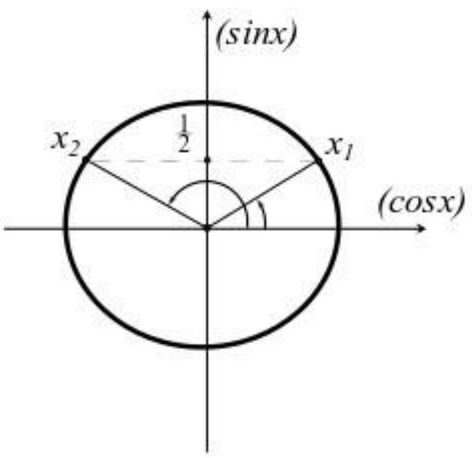


Рис. 2

Пусть $\sin x = t, \quad -1 \le t \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t^2 - 7t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{2}; \quad t_2 = 3 > 1$ – посторонний корень $\Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}.$

Строим единичную окружность (рис. 2), на которой отмечаем соответствующее значение синуса:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in z$.

2. $2\cos 2x = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + 1$.

Решение.

Так как $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то перепишем уравнение:

$2(2cos^2 x - 1) = 4\cos x + 1 \Rightarrow$

$4cos^2 x - 2 - 4\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$

Пусть $\cos x = t, \quad -1 \le t \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4t^2 - 4t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2}; \quad t_2 = \frac{3}{2} > 1$ – посторонний корень

$\Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}.$

Строим единичную окружность (рис. 3), на которой отмечаем соответствующее значение косинуса.

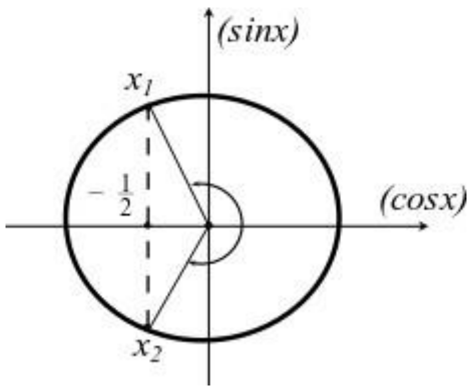


Рис. 3

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x_2 = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, \quad k \in z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in z$.

3. $2\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$.

Решение.

Так как $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, а $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, то уравнение можно переписать как $-2cosx \sin x - 2\sin x \cos x + 1 = 0$. Так как $2\sin x \cos x = \sin 2x$, то имеем $-2\sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$.

Из примера 1 следует, что $\left[\begin{array}{l} 2x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ 2x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\pi k, \\ x_2=\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+\pi k, \end{array}\right.$
$k\in z \qquad k\in z$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{12}+\pi k, \quad x=\dfrac{5\pi}{12}+\pi k, \quad k\in z$.

4. $2\sin 2x+2\sin x-3=6\cos x$.

Решение.

Так как $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то уравнение можно переписать как
$4\sin x\cos x+2\sin x-3-6\cos x=0.$

Сгруппируем первые два и последние два слагаемых в левой части:
$2\sin x(\cos 2x+1)-3(1+2\cos x)=0\Rightarrow$

$(2\cos 2x+1)(2\sin x-3)=0\Rightarrow$

$(\cos 2x+1)=0$ или $2\sin x-3=0.$

Тогда $\cos x=-\dfrac{1}{2}$, а $\sin x=\dfrac{3}{2}>1$. Поэтому только $\cos x=-\dfrac{1}{2}$. Из примера 2 следует, что $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in z$

Ответ: $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in z$.

5. $1-4\sin x\cos x-6\cos^2 x=0$.

Решение.

Так как $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, то уравнение можно переписать как
$\sin^2 x+\cos^2 x-4\cos x\sin x-6\cos^2 x=0\Rightarrow$

$\sin^2 x-5\cos^2 x-4\sin x\cos x=0.$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. Тогда имеем

$\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-5-\dfrac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x}=0\Rightarrow$

$tg^2 x-4tgx-5=0$

Пусть $2tgx=t\Rightarrow t^2-4t-5=0\Rightarrow t_1=-1, t_2=5\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} tgx=-1, \\ tgx=5, \end{array}\right.$

Используя единичную окружность (рис. 4), имеем:

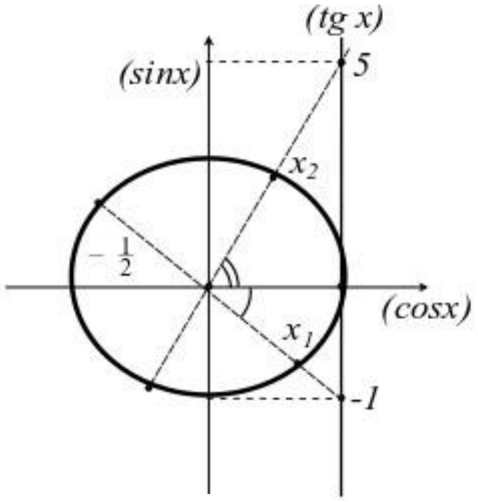


Рис. 4

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in z$$
$$x_2 = arctg\,5 + \pi l, \quad l \in z$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in z, \quad x = arctg\,5 + \pi l, l \in z$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $2\cos 2x + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0.$
2. $2\cos 2x + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0.$
3. $8\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0.$
4. $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$
5. $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0.$
6. $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0.$
7. $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0.$
8. $\cos 2x + 3\cos x - 2 = 0.$
9. $3\cos 2x - 5\sin x + 1 = 0.$
10. $\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0.$
11. $\cos 2x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$
12. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x.$
13. $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$
14. $\cos 2x + \sin^2 x - 0{,}5 = 0.$

15. $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0.$

16. $4\cos^2 x + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$

17. $\cos 2x + \sin^2 x - 0{,}25 = 0.$

18. $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

19. $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0.$

20. $tg^2 x + \left(1 + \sqrt{3}\right) tgx + \sqrt{3} = 0.$

Уравнения смешанного типа

1. $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$, выбрать корни из отрезка $\left[5\pi, \frac{13\pi}{2}\right].$

2. $\frac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = 4^{2\cos^2 x - \cos x}$, выбрать корни из отрезка $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right].$

3. $\left(tg^2 x - 1\right)\sqrt{13\cos x} = 0$, выбрать корни из отрезка $\left[-3\pi, -\frac{3\pi}{2}\right].$

4. $4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}$, выбрать корни из отрезка $\left[\frac{5\pi}{2}, 4\pi\right].$

5. $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$, выбрать корни из отрезка $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right].$

6. $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$, выбрать корни из отрезка $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right].$

7. $2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0$, выбрать корни из отрезка $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right].$

8. $\frac{\left(tgx + \sqrt{3}\right)\log_{13}\left(2\sin^2 x\right)}{\log_{31}\left(\sqrt{2}\cos x\right)} = 0.$

9. $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$, выбрать корни из отрезка $\left[\frac{5\pi}{2}, 4\pi\right].$

10. $3\log_8^2(\sin x) - 5\log_8(\sin x) - 2 = 0$, выбрать корни из отрезка $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right].$

11. $0{,}4^{\sin x}+2{,}5^{\sin x}=2,$ выбрать корни из отрезка $\left[7\pi,\frac{7\pi}{2}\right]$.

12. $\log_9\left(3^{2x}+5\sqrt{2}\sin x-6\cos^2 x-2\right)=x,$ выбрать корни из отрезка $\left[-2\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$.

13. $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0,$ выбрать корни из отрезка $\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$.

14. $\cos x+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x+1)}=0,$ выбрать корни из отрезка $\left[-\frac{11\pi}{2},-4\pi\right]$.

15. $\dfrac{\sqrt{3}tgx+1}{2\sin x-1}=0,$ выбрать корни из отрезка $\left[\frac{9\pi}{2},6\pi\right]$.

16. $\dfrac{3ctg^2 x+4ctgx}{5\cos^2 x-4\cos x}=0,$ выбрать корни из отрезка $\left[\frac{5\pi}{2},5\pi\right]$.

17. $\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}=1,$ выбрать корни из отрезка $\left[-4\pi,-\frac{5\pi}{2}\right]$.

18. $\dfrac{2\sin^2 x-\sin x}{2\cos x-\sqrt{3}}=0,$ выбрать корни из отрезка $\left[\frac{3\pi}{2},3\pi\right]$.

19. $\dfrac{2\cos x-\sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}}=0,$ выбрать корни из отрезка $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$.

20. $\sin\frac{x}{3}=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2+x^2-25.$

Глава 3. Функции и графики

§ 1. Линейная функция

Функция, заданная формулой $y = k \cdot x + b$, где k и b – некоторые числа, называется *линейной*.

Область определения линейной функции служит множество R всех действительных чисел, так как выражение $k \cdot x + b$ имеет смысл при любых значениях x.

Графиком линейной функции $y = k \cdot x + b$ является прямая линия.

Для построения прямой вида $y = k \cdot x + b$ достаточно задать координаты двух точек, например $A(0,b)$, $B(-\frac{b}{k}; 0)$, где $k \neq 0$.

Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая $y = k \cdot x$ с положительным направлением оси Ox. Если $k > 0$, то этот угол острый; если $k < 0$, тупой; если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox.

Точка с координатами $(0, b)$ – точка пересечения прямой с осью Oy.

Удобно вычисления оформлять в виде таблицы:

x	0	$-b/k$
y	b	0

Получаем две точки $A(0,b)$ и $B(-b/k, 0)$. Через них проводим прямую (рис. 5).

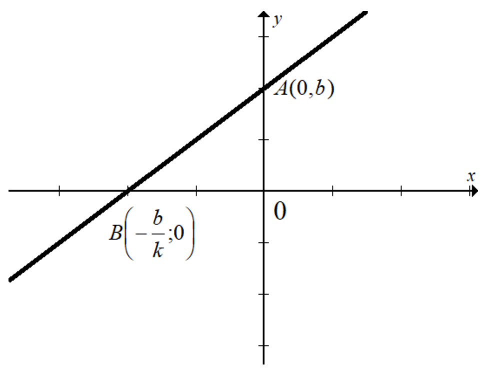


Рис. 5. График линейной функции $y = k \cdot x + b$

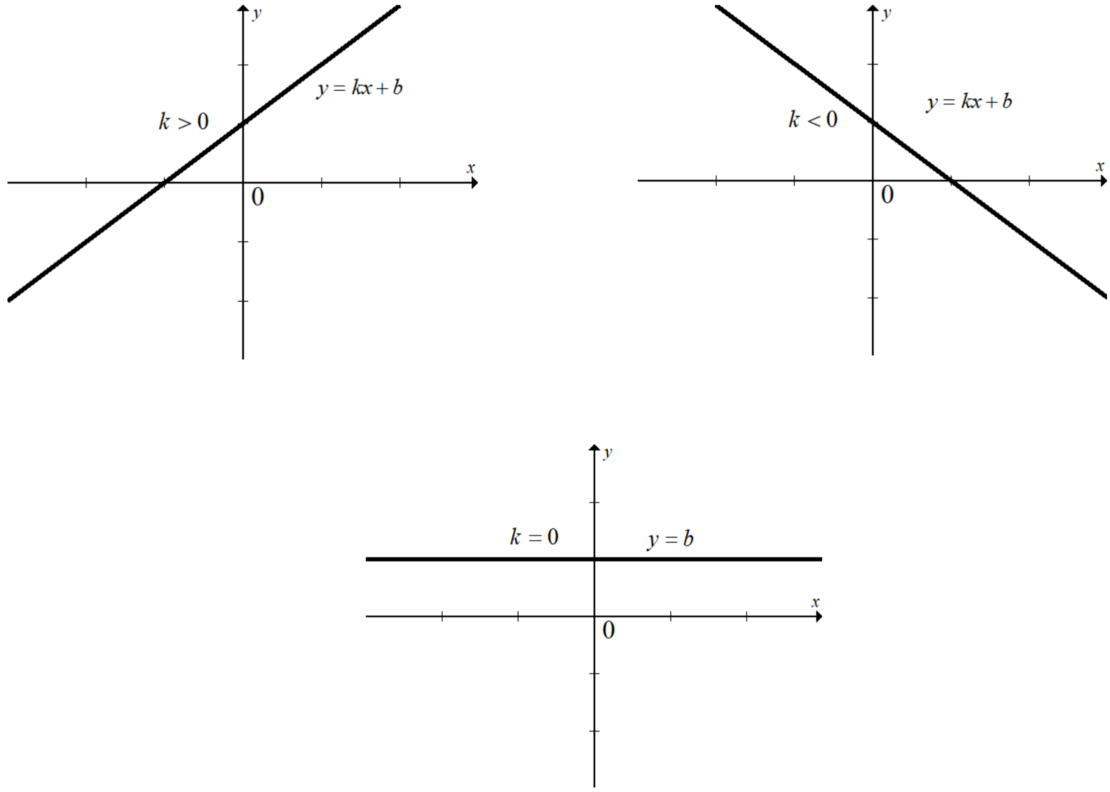


Рис. 6. График линейной функции при различных значениях k

Пример

Построить график функции $y = x + 1$.

Решение. Здесь $k = 1$ и $b = 1$.
Построим таблицу:

x	0	–1
y	1	0

По двум точкам с координатами $A(0, 1)$ и $B(–1, 0)$ проводим прямую (рис. 7).

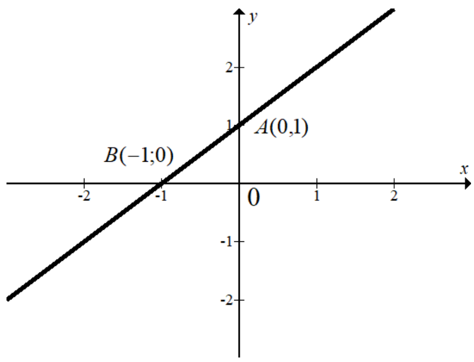


Рис. 7. График функции $y = x + 1$

§ 2. Обратная функция

Если переменная y пропорциональна переменной x, то эта зависимость выражается формулой $y = k \cdot x$, где $k \neq 0$ – коэффициент пропорциональности.

Если переменная y обратно пропорциональна переменной x, то эта зависимость выражается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ – коэффициент обратной пропорциональности.

Функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, называется обратной функцией.

Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ служит множество всех чисел, отличных от нуля, т.е. $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ является кривая, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется *гиперболой* (рис. 8).

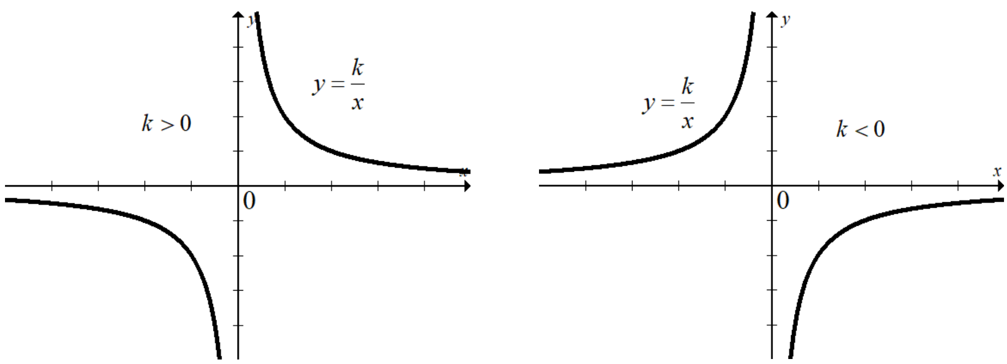


Рис. 8. Гипербола для различных значений k

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях; если $k < 0$, то ветви гиперболы расположены в II и IV координатных четвертях.

Заметим, что гипербола не имеет общих точек с осями координат, а лишь сколь угодно близко к ним приближается.

§ 3. Квадратичная функция

Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x и y – переменные, а a, b и c – заданные числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратичной*.

Областью определения функции служит множество R.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является *парабола*. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Осью симметрии параболы служит прямая $x = \frac{-b}{2a}$.

Координаты вершины параболы определяются по следующим формулам:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}, \quad y_0 = y(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно привести к виду $y = a(x+k)^2 + p$ путем выделения полного квадрата.

Точки пересечения с осью Ox определяются с помощью формул

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

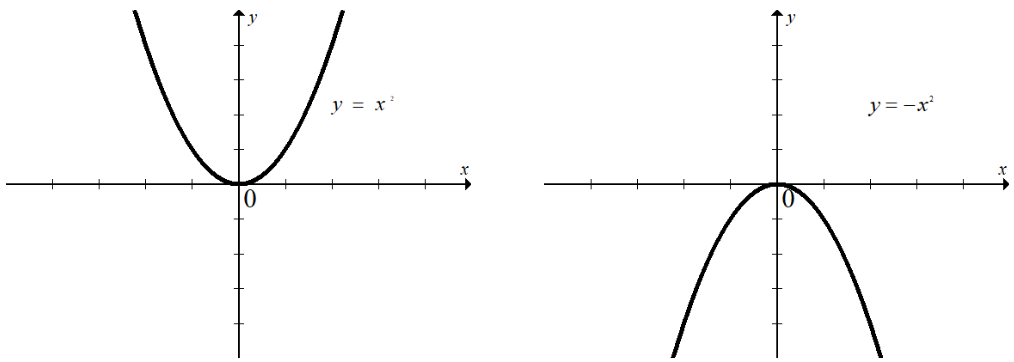


Рис. 9. Параболы при $D = 0$

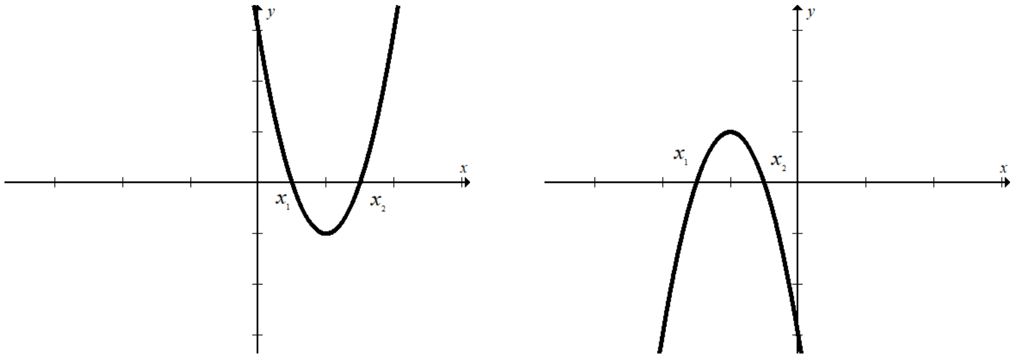


Рис. 10. Параболы при $D > 0$

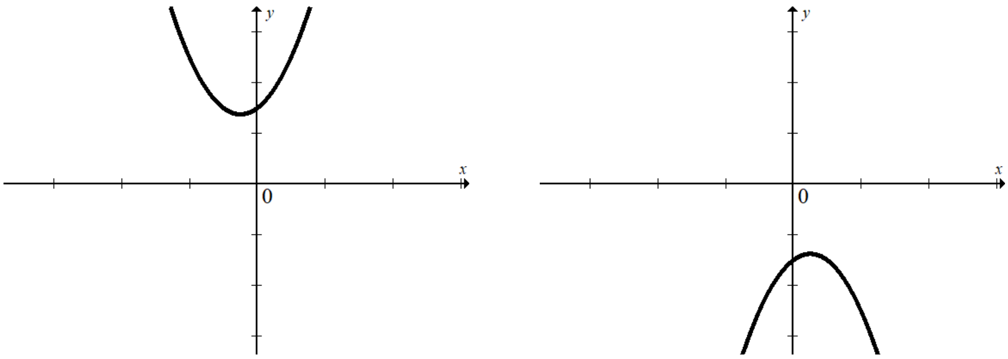


Рис. 11. Параболы при $D < 0$

§ 4. Функция $y = \sqrt{x}$

Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ служит множество всех неотрицательных чисел, т.е. $x \in [0;+\infty)$.

Графиком функции $y = \sqrt{x}$ является кривая, представляющая собой ветвь параболы относительно оси Ox (рис. 12).

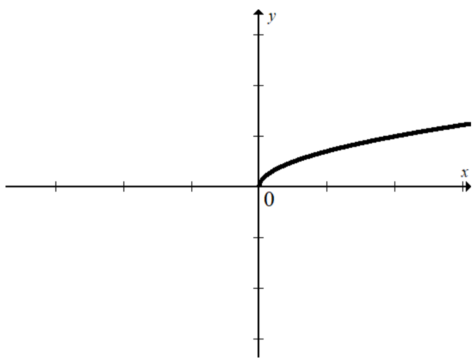


Рис. 12. График функции $y = \sqrt{x}$

Заметим, что кривая $y = \sqrt{x}$ имеет одну общую точку с осями координат с координатами (0, 0).

§ 5. Показательная функция

Функция, заданная формулой вида $y = a^x$, где a – некоторое положительное число, не равное единице, называется *показательной*.

Функция $y = a^x$ при $a > 1$ обладает следующими свойствами:

а) область определения – множество всех действительных чисел;

б) область значений – множество всех положительных чисел;

в) функция возрастает;

г) при $x = 0$ значение функции равно 1;

д) если $x > 0$, то $a^x > 1$;

е) если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$ (рис. 13).

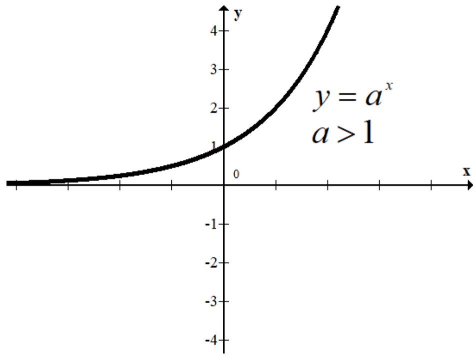


Рис. 13. График показательной функции при $a > 1$

Функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ обладает следующими свойствами:

а) область определения – множество всех действительных чисел;

б) область значений – множество всех положительных чисел;

в) функция убывает;

г) при $x = 0$ значение функции равно 1;

д) если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$;

е) если $x < 0$, то $a^x > 1$ (рис. 14).

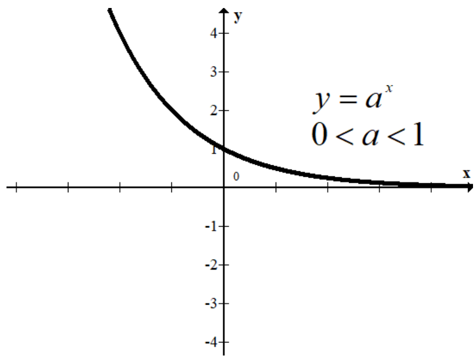


Рис. 14. График показательной функции при $0 < a < 1$

Частный случай показательной функции $y = a^x$, где $a = e$, продемонстрирован на рис. 15.

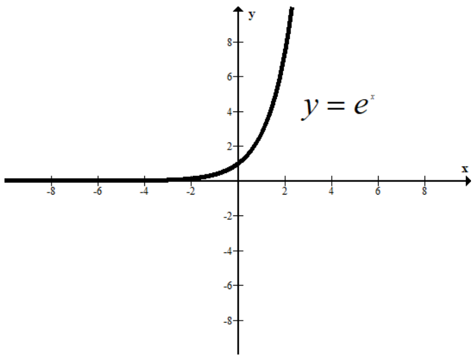


Рис. 15. Частный случай показательной функции

§ 6. Логарифмическая функция

Функция, заданная формулой вида $y = \log_a x$, где a – некоторое положительное число, не равное единице, называется *логарифмической.*

Показательная и логарифмическая функции при одном и том же основании являются взаимно обратными функциями.

График логарифмической функции $y = \log_a x$ можно построить, воспользовавшись тем, что функция $y = \log_a x$ – обратная показательной функции $y = a^x$. Поэтому достаточно построить график функции $y = a^x$, а затем отобразить его симметрично относительно прямой $y = x$. На рис. 16 изображен график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$, а на рис. 17 – график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

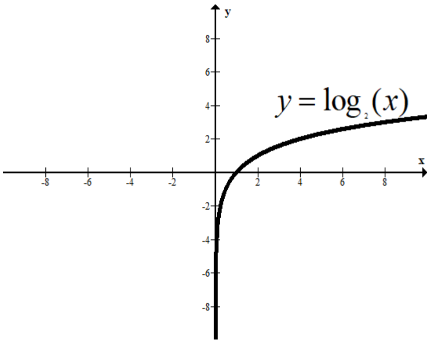


Рис. 16. График функции $y = \log_a x$ при $a > 1$

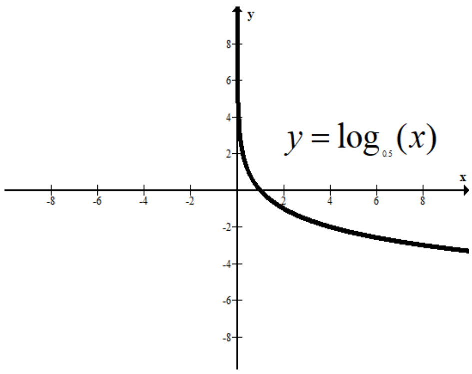


Рис. 17. График функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$

Свойства функции $y = \log_a x$ при $a > 1$:

а) область определения – множество всех положительных чисел;

б) область значений – множество всех действительных чисел;

в) функция возрастает;

г) при $x = 1$ $\log_a x = 0$;

д) если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$;

е) если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.

Свойства функции $y = \log_a x$ при $a > 1$:

а) область определения – множество всех положительных чисел;

б) область значений – множество всех действительных чисел;

в) функция убывает;

г) при $x=1$ $\log_a x=0$;

д) если $0<x<1$, то $\log_a x>0$;

е) если $x>1$, то $\log_a x<0$.

§ 7. Преобразование графиков

Вспомогательные приемы построения графика функции

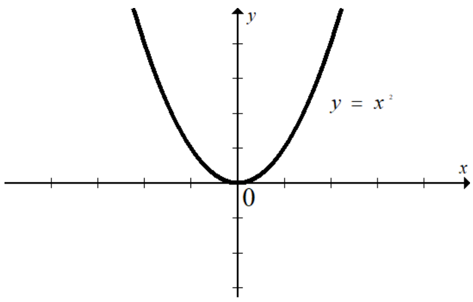


Рис. 18. График функции $y = x^2$

1. Параллельный перенос оси ординат Oy. Пусть $y = f(x+a)$, где $y = f(x)$ – известная функция.

Для примера рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ – парабола.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x+3)^2$– парабола. Строим $f(x) = x^2$, но ось Oy сдвигаем на 3 единицы вправо (рис. 19).

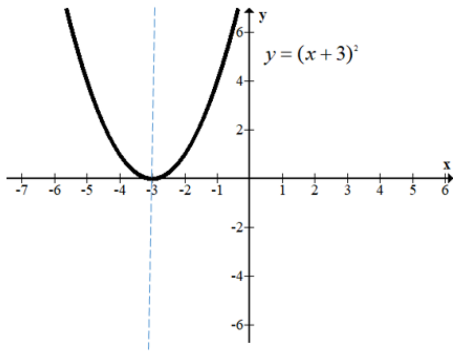


Рис. 19. График функции $y = (x+3)^2$

Рассмотрим функцию $f(x) = (x-3)^2$– парабола. Строим $f(x) = x^2$, но ось Oy сдвигаем на 3 единицы влево (рис. 20).

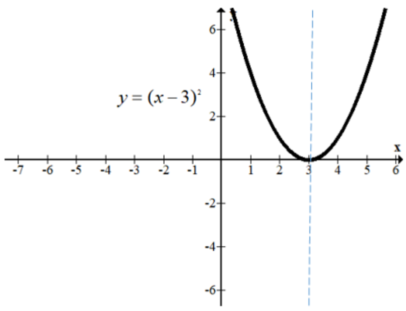


Рис. 20. График функции $y = (x-3)^2$

2. Параллельный перенос оси абсцисс *Ox*.

Пусть $y = f(x) + b$, где $y = f(x)$ – известная функция.

Для примера опять рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ – парабола.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 2$. Строим $f(x) = x^2$, но ось *Ox* сдвигаем на 2 единицы вниз (рис. 21).

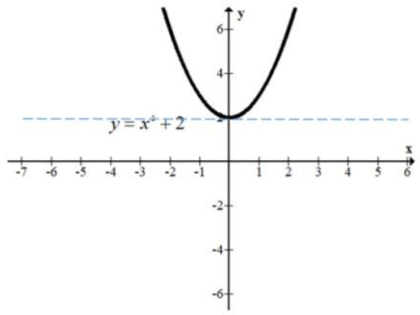


Рис. 21. График функции $y = x^2 + 2$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2$. Строим $f(x) = x^2$, но ось *Oy* сдвигаем на 2 единицы вверх (рис. 22).

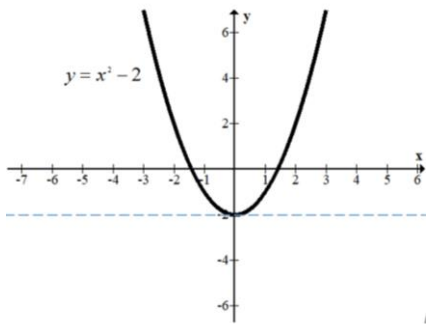


Рис. 22. График функции $y = x^2 - 2$

Замечание. Надо иметь в виду, что сдвиг оси *Oy* производится на величину *a* – «добавку» к положительному числу *x*. Но если задан будет $y = f(-x + a)$, то вначале надо сделать преобразование $y = f(-(x - a))$, и принимаем за «известную» функцию $y = f(-(x))$.

3. Зеркальное отображение относительно оси *Ox* (рис. 23).

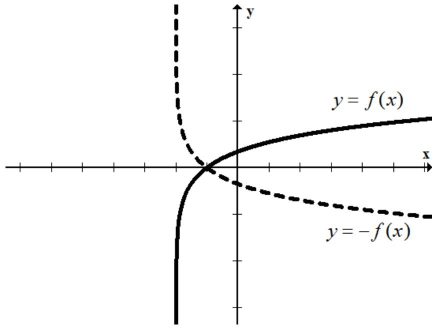


Рис. 23. Графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$

Пример

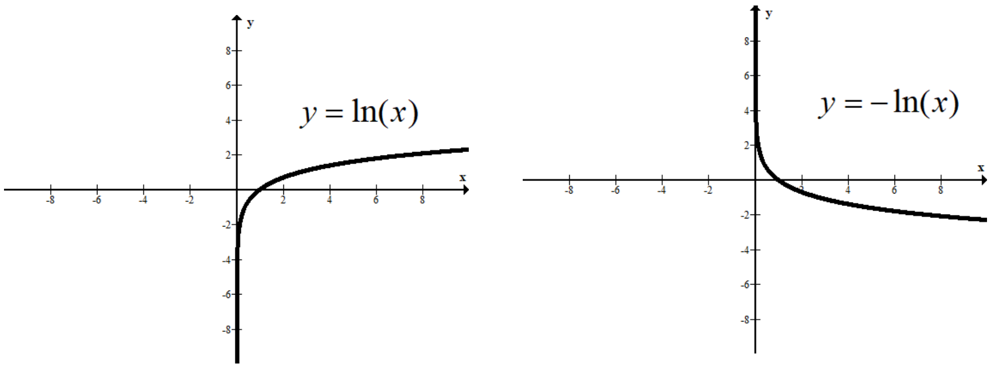


Рис. 24. Графики функций $y = ln(x)$ и $y = –ln(x)$

4. Растяжение или сжатие графика по оси Oy графика функции $y = m \cdot f(x)$.

Если $m > 1$, происходит сжатие в m раз относительно оси Oy (рис. 25).

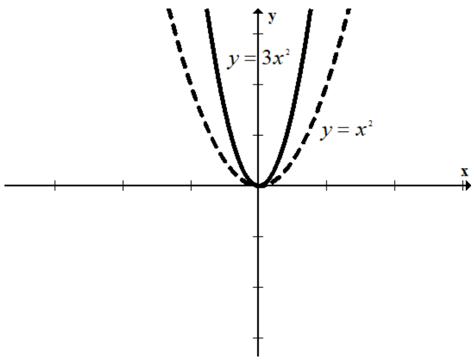


Рис. 25. Графики функций $y = x^2$ и $y = 3x^2$

Если $0 < m < 1$, происходит растяжение в m раз относительно оси Oy (рис. 26).

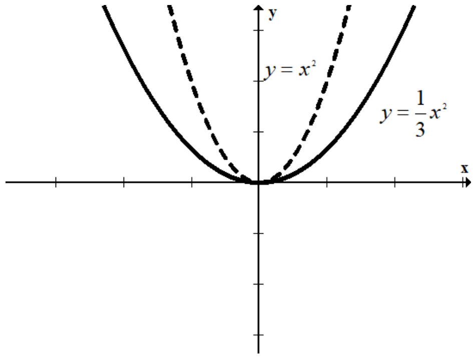


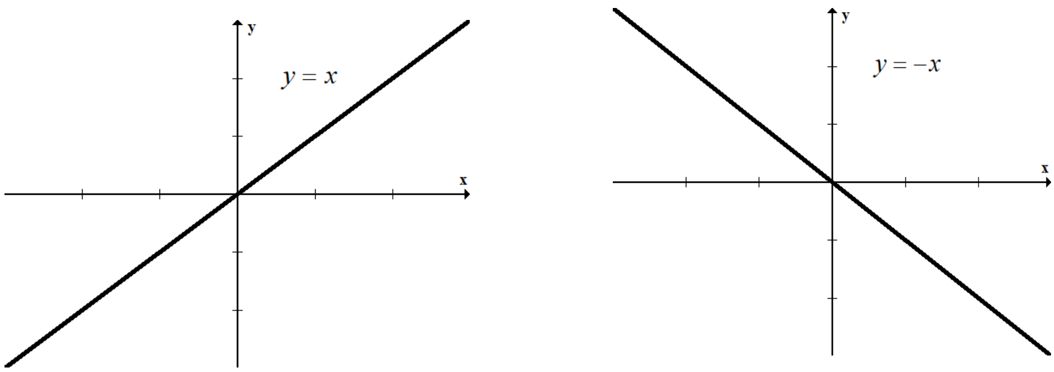
Рис. 26. Графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{1}{3}x^2$

Построение графиков функции, содержащих знак модуля

1. $y = |x|$:

$$y = |x| = \begin{cases} x, \ при \quad x \geq 0, \\ -x, при \quad x < 0. \end{cases}$$

Так выглядят функции $y = x$ и $y = -x$ по отдельности (рис. 27).



а б

Рис. 27. Графики функций $y = x$ (а) и $y = –x$ (б)

Чтобы изобразить функцию $y = |x|$, необходимо отрицательную часть графика функции $y = x$ отобразить относительно оси *Ox* (рис. 28). Функция $y = |x|$ – это четная функция, симметричная относительно оси *Oy*.

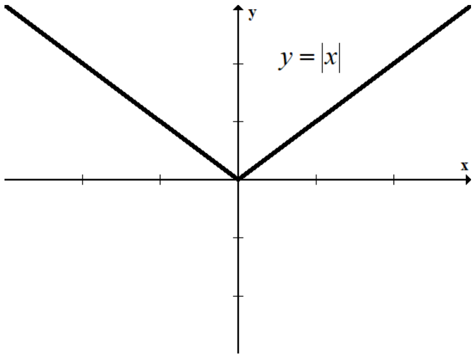


Рис. 28

2. $y=|x-3|$. Так же как в случае с параллельным переносом оси *Oy* из раздела «Вспомогательные приемы построения графика функции», будем перемещать ось *Oy* (рис. 29).

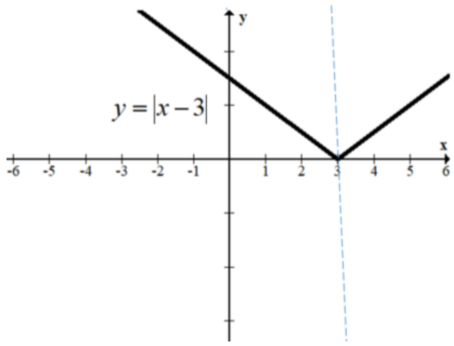


Рис. 29

3. $y=|x+3|+2$. Перемещаем оси *Ox* и *Oy* (рис. 30).

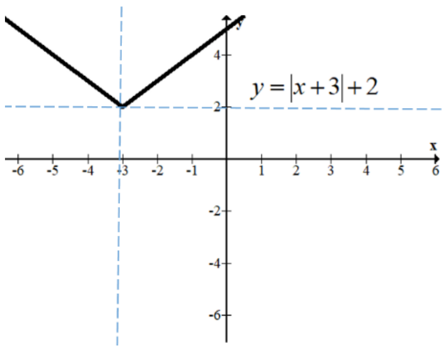


Рис. 30

Построение графика функции $y = |f(x)|$

По определению модуля

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{для тех } x, \text{где} \quad f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{для тех } x, \text{где} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, надо сначала построить график функции $y = f(x)$, а затем участки этого графика, лежащие ниже оси *Ox*, зеркально отразить от этой оси (рис. 31).

Пример

$y = \left|x^2 + 3x - 10\right|$.

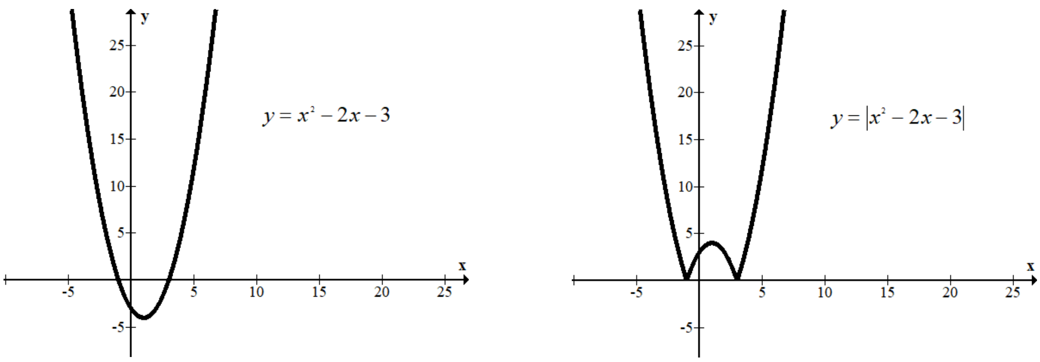


Рис. 31

Построение графика функции $y = |f(|x|)|$

1. Построить график функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$.

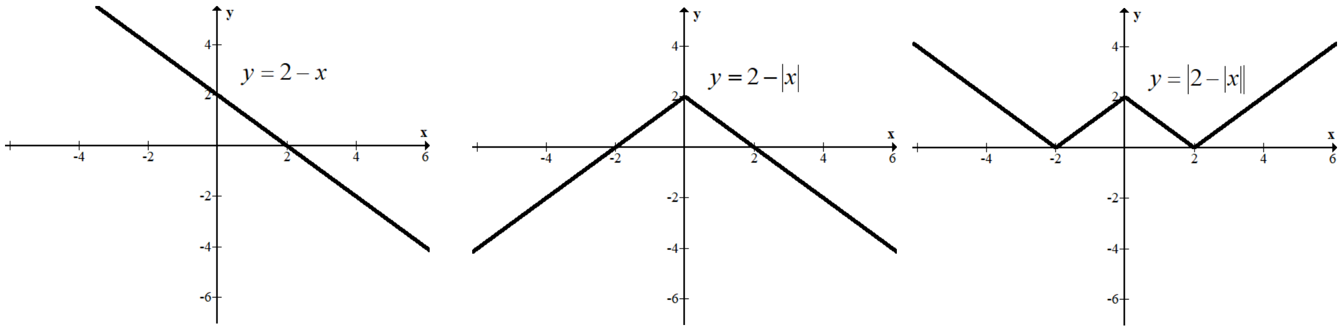
2. Отобразить этот график симметрично относительно оси *Oy* $y = f(|x|)$ – четная функция.

3. Участки графика функции $y = f(|x|)$, расположенные ниже оси *Ox*, отобразить зеркально от этой оси.

Пример

$y = |2 - |x||$ – график этой функции можно построить двумя способами.

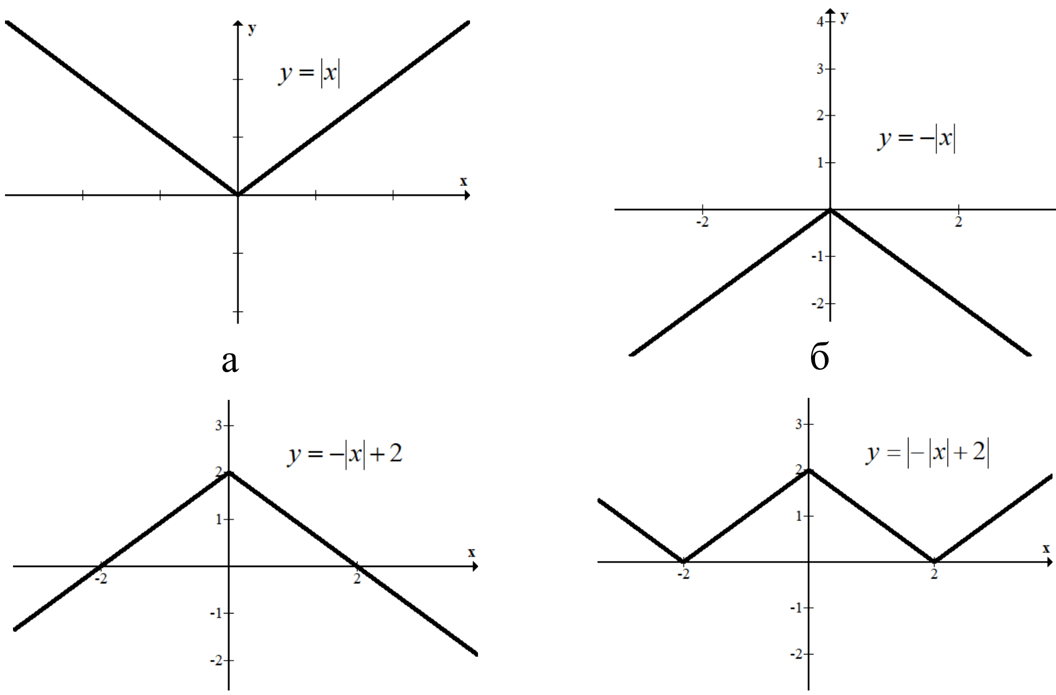
Первый способ показан на рис. 32.



а б в

Рис. 32

Второй способ продемонстрирован на рис. 33.



в г

Рис. 33

Задачи для самостоятельного решения

Построить график функций:

1. $y = 2x - 6$.
2. $y = 20 - 3x$.
3. $3x + 2y = 5$.

4. $x = 3y + 10$.

5. $y = 0.5 - 0.3x$.

6. $x + y = 5$.

7. $y = \frac{2}{x}$.

8. $y = \frac{-6}{x}$.

9. $y = 2\sqrt{x}$.

10. $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$.

11. $y = \sqrt{x} + 6$.

12. $y = -x^2 + 2$.

13. $y = -(x-3)^2 + 2$.

14. $y = (x+5)^2 - 1$.

15. $y = (x+0.5)^2$.

16. $y = -2(x-2)^2$.

17. $y = 2x^2 + 6$.

18. $y = 2x^2 + x$.

19. $y = \frac{(x+3)^2}{5}$.

20. $y = \frac{x^2}{4} - 4$.

21. $x^2 - 24y = 100$.

22. $y = 2x^2 - 4x + 1$.

23. $y = x^2 - 4x + 5$.

24. $y = -x^2 + 6x - 5$.

25. $y = 2^x$.

26. $y = 2e^x + 1$.

27. $y = -(0.5^x) + 1$.

28. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 6$.

29. $y = -10^x + 6$.

30. $y = \log_3 x$.

31. $y = 2 - \log_{0.5} x$.

32. $y = \ln x + 5$.

33. $y = 5 - \lg x$.

34. $y = -2|x - 1|$.

35. $y = \left| x/2 + 1 \right|$.

36. $y = \dfrac{|x + 6|}{4}$.

37. $y = -0.2 \cdot |1 - x|$.

38. $y = 5|x + 1| + 1$.

39. $y = |2x + 3| - 5$.

40. Построить график функции

$$y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + 3, & \text{если} \quad x \geq 2, \\ x - 1, & \text{если} \quad x < 2. \end{cases}$$

41. Построить график функции

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 1, & \text{если} \quad x \geq 4, \\ -x + 5, & \text{если} \quad x < 4. \end{cases}$$

42. Построить график функции $y = |x^2 + 6x + 5|$ и найти, при каких значениях m прямая $y = m$ пересекает построенный график ровно в трех точках.

43. Построить график функции $y = -(\sqrt{-x^2 - 2x})^2$ и определить, при каких значениях k прямая $y = kx - \dfrac{1}{4}$ имеет с графиком ровно две общие точки.

44. Построить график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 7, & \text{если} \quad x \geq -4, \\ x + 10, & \text{если} \quad x < -4. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

45. Построить график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+4, & \textit{если} \quad x\geq -1, \\ -\dfrac{9}{x}, & \textit{если} \quad x<-1. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

46. Построить график функции

$$y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{4}-\frac{4}{x}\right|+\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\right).$$

Определить, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответы

Преобразование числовых и алгебраических выражений

Действия с дробями

Действия с обыкновенными дробями

1. 0,2. **2.** 1,35. **3.** 3,91. **4.** –0,3. **5.** 1,15. **6.** $\frac{1}{9}$. **7.** $8\frac{29}{36}$. **8.** $2\frac{67}{75}$. **9.** 43, 375. **10.** $20\frac{1}{12}$. **11.** $35\frac{35}{36}$. **12.** $13\frac{89}{96}$. **13.** $6\frac{5}{6}$. **14.** 126. **15.** 0,8. **16.** –2. **17.** 10. **18.** 31,6. **19.** 79,2. **20.** 0,44.

Действия с десятичными дробями

1. 1,6. **2.** 2,25. **3.** 1. **4.** 55. **5.** 3,75. **6.** 3,2. **7.** 12,5. **8.** 10. **9.** 0,95. **10.** 80,625. **11.** 8. **12.** 5. **13.** 4,4. **14.** 270. **15.** 34,3.

Сравнение чисел

1. 1). **2.** 3). **3.** 3). **4.** 2). **5.** 3). **6.** 4). **7.** 3). **8.** 4). **9.** 3). **10.** 2), 3). **11.** А-4), Б-3), В-1), Г-2). **12.** А-1), Б-3), В-2). **13.** 1), 3). **14.** 3). **15.** 1).

Вычисление значений степенных выражений

Степени и их свойства

1. –30. **2.** 35. **3.** 20. **4.** 105. **5.** –820. **6.** –320. **7.** –720. **8.** –790. **9.** –550. **10.** 0,5604. **11.** –3,86. **12.** –3786,7. **13.** 1951,1. **14.** 0,000196. **15.** 0,0000335. **16.** 0,000026. **17.** 0,2. **18.** $\frac{1}{49}$. **19.** 3328. **20.** 7. **21.** 121. **22.** 54. **23.** 5. **24.** 49. **25.** 9. **26.** 1,5. **27.** 1,4. **28.** 7. **29.** 5. **30.** 20. **31.** 7. **32.** 64. **33.** $\frac{8}{9}$. **34.** 5. **35.** 5. **36.** 13,5. **37.** 0,25. **38.** 0,0001. **39.** 0,5. **40.** 88. **41.** 16. **42.** 3,2. **43.** 0,8. **44.** 150. **45.** –0,5. **46.** 6. **47.** 8. **48.** 49. **49.** 121. **50.** 2,5. **51.** 144. **52.** 3,5. **53.** 27. **54.** 36. **55.** 15. **56.** 2. **57.** 96. **58.** 2,4. **59.** 4. **60.** 80. **61.** 126.

Преобразование числовых иррациональных выражений

1. 18. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** 24. **4.** 2. **5.** 90. **6.** 220. **7.** 198. **8.** 5. **9.** $120\sqrt{3}$. **10.** $2\left(12+\sqrt{23}\right)$. **11.** $2\left(43-\sqrt{85}\right)$. **12.** 243. **13.** 5. **14.** 4. **15.** 2. **16.** 42. **17.** –15. **18.** 7. **19.** 6. **20.** 6. **21.** 7. **22.** 2. **23.** 2. **24.** 5. **25.** 1. **26.** 15. **27.** 7. **28.** 2.

Преобразование буквенных иррациональных выражений

1. 49. **2.** 0,8. **3.** 25. **4.** 32. **5.** 3. **6.** 4. **7.** 12. **8.** 9. **9.** 0,25. **10.** 4. **11.** 5. **12.** 12. **13.** 0. **14.** 1.

Преобразование алгебраических выражений

1. $16a^2 + 24ab - 9b^2$. **2.** $4x^2 + 28xy - 49y^2$. **3.** $b^6(25 - 40b - 16b^2)$. **4.** $27y^6 + 27y^2 + 15z^6 + 125z^9$. **5.** $64b^3 2 - 16b^2c^2 + \frac{4bc^4}{3} - \frac{c^6}{27}$. **6.** $(2x - y)(2x + y)$. **7.** $(4a - b)(4a + b)$. **8.** $(x - \sqrt{3}y^3)(x + \sqrt{3}y^3)(x^2 + 3y^6)$. **9.** $(x - 3)(x + 5)$. **10.** $(7 - c)(3 + c)$. **11.** $(y - z - 3)(y + z - 1)$. **12.** $3a(a - 2b)$. **13.** $(3 - a)(9 + 3a + a^2)$. **14.** $(4 + b)(16 - 4b + b^2)$. **15.** $(4 + xy)(16 - 4xy + x^2y^2)$. **16.** $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$. **17.** $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ или $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$. **18.** $(2\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})$. **19.** $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$. **20.** $(2\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{b})(4\sqrt[3]{a^2} - 6\sqrt[3]{ab} + 9\sqrt[3]{b^2})$. **21.** 4. **22.** 5. **23.** 2. **24.** $(x - 1)(x + 1)(y - 1)$. **25.** $\frac{x-1}{x}$. **26.** $\frac{x-2}{x}$. **27.** $(x + 3)$. **28.** $\frac{b+3}{a+2}$. **29.** 11. **30.** –25. **31.** 333. **32.** 2. **33.** 2. **34.** –12. **35.** –2. **36.** 360. **37.** 6. **38.** –367. **39.** 346. **40.** –7. **41.** $\frac{7}{x}$. **42.** –3. **43.** $\frac{1}{(m-1)^2}$. **44.** 1. **45.** 2. **46.** 1. **47.** 10. **48.** 6. **49.** –2. **50.** –12. **51.** 14. **52.** 0. **53.** –17. **54.** 0. **55.** 64. **56.** –1. **57.** 1.

Преобразование различных выражений

1. 33. **2.** 6. **3.** 0,5. **4.** 2. **5.** 2. **6.** 4. **7.** $\sqrt{x} - \sqrt{y} - x^2 + xy - y^2$. **8.** $\frac{x}{x-y}$. **9.** $\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **10.** 1. **11.** x. **12.** 1. **13.** 1. **14.** $2ab$. **15.** $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$. **16.** $-27x\sqrt{a}$.

Линейные уравнения

1. –1,75. **2.** –2,5. **3.** –3. **4.** 9,7. **5.** 8. **6.** $x \in R$. **7.** $x \in \emptyset$. **8.** $x \in R$. **9.** $x \in R$. **10.** $x \in \emptyset$. **11.** $\frac{15}{16}$. **12.** $x \in \emptyset$. **13.** $x \in \emptyset$. **14.** 5. **15.** –6. **16.** 6,3. **17.** 16. **18.** –4. **19.** 36. **20.** –1,25. **21.** 14. **22.** 0,6; 6. **23.** 1. **24.** 1,5. **25.** –4,5. **26.** –1,6. **27.** –1. **28.** 4. **29.** 0,5. **30.** 2. **31.** 8. **32.** $-\frac{2}{3}$.

Квадратные уравнения

1. –2; 3. **2.** –2; 9. **3.** –7; –1. **4.** 1; 8. **5.** 0,5; 1. **6.** $x \in \emptyset$. **7.** $-\frac{1}{3}$. **8.** 4; 6. **9.** –4; 1. **10.** –2; 4. **11.** 1; 4. **12.** 0; 6. **13.** –2,5. **14.** 1. **15.** 2,25. **16.** –9,7. **17.** ±0,2. **18.** 0; 5. **19.** ±1. **20.** $x \in \emptyset$. **21.** ±1. **22.** $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$.

Теорема Виета

1. а) $x^2 - 10x + 16 = 0$; б) $x^2 - 8x + 15 = 0$; в) $8x^2 - 2x - 1 = 0$. **2.** –24. **3.** –35. **4.** 3.

Рациональные уравнения

1. 4. **2.** 8. **3.** 24. **4.** 22. **5.** –3; 2. **6.** –4,5. **7.** 5. **8.** 1. **9.** $x \in R,\ x \neq \frac{2}{3}$. **10.** $x \in R,\ x \neq -2$. **11.** –1; 3; $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$. Указание: сделать замену $t = \frac{x^2-3}{x}$. **12.** $x \in \emptyset$. Указание: сделать замену $t = \frac{x^2+1}{x}$. **13.** $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Указание: сделать замену $t = x^2 + x + 1$. **14.** 1; 3. **15.** –3; 1. **16.** –1; 4; $\frac{12\pm\sqrt{86}}{2}$. Указание: сделать замену $t = \frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}$. **17.** –2; 5; $\frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$. Указание: сделать замену $t = \frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}$.

Иррациональные уравнения

1. 6. **2.** 11. **3.** 31. **4.** –2,5. **5.** 87. **6.** $x \in \emptyset$. **7.** 5. **8.** ±4. **9.** $x \in \emptyset$. **10.** –0,25. **11.** $x \in \emptyset$. **12.** –3; 0. **13.** –9; –8. **14.** 3. **15.** $x \in \emptyset$. **16.** 7. **17.** $x \in \emptyset$. **18.** 1. **19.** $x \in \emptyset$. **20.** –0,75. **21.** $\pm 2\sqrt{3}$. **22.** $x \in \emptyset$. **23.** $-\frac{1}{11}$. **24.** $\frac{5}{3}$. Указание: сделать замену $t = \frac{x+1}{x-1}$. **25.** 81. **26.** –2. **27.** 8. **28.** 0; 2,5. **29.** –3; 6. Указание: заметить, что $(x-3)^2 + 3x - 22 = (x^2 - 3x + 7) - 20$. **30.** ±2.

Системы уравнений

1. (1; 4). **2.** (1; –2). **3.** (3; –2). **4.** $x \in \emptyset$. **5.** $(x; 5-x),\ x \in R$. **6.** (2; 4), $\left(\frac{2}{17}; \frac{76}{17}\right)$. **7.** (–1; 6), (3; –2). **8.** (3; –2). **9.** (4; 5), $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **10.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$, $(2; y)$, $y \in R$. **11.** (2; 1), (–1; –2). **12.** (4; 3), (–3; –4). **13.** (5; 1), $\left(5; -\frac{17}{2}\right)$, $\left(6+\sqrt{46}; -4\right)$, $\left(6-\sqrt{46}; -4\right)$. **14.** (–4; 2), (–4; –3), (3; 2), (3; –3). **15.** (4; 1), (1; 4). **16.** $\left(1-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}\right)$, $\left(-1+\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}\right)$. **17.** $\left(3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$,

$(3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2};\ \sqrt{2})$. **18.** (8; 4), (4; 8). **19.** (9; 2). **20.** (4; 9), (9; 4), $(4-\sqrt{15};\ 4+\sqrt{15})$, $(4+\sqrt{15};\ 4-\sqrt{15})$.

Показательные уравнения

1. –4; – 2. **2.** 0,5. **3.** $-\dfrac{38}{3}$. **4.** $-2\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$. **5.** 1. **6.** –2; 2. **7.** 3. **8.** –3; –1. **9.** –2. **10.** –2; –1. **11.** –0,25. **12.** 1. **13.** 2. **14.** 2. **15.** –1. **16.** –3. **17.** 1; $\log_3 5, \log_3 5$. **18.** $1\pm\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$. **19.** $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Логарифм положительного числа по заданному основанию

1. 25. **2.** 0,2. **3**. –3. **4**. 15. **5**. –2. **6.** 11. **7.** 42. **8.** 10. **9**. 4. **10.** 2. **11.** 19. **12.** 0,5. **13.** 13.

Логарифмические уравнения

1. 150. **2.** 2. **3.** 1,5; 10. **4.** 4. **5.** $\dfrac{6+3\sqrt{29}}{5}$. **6.** 2. **7.** 1,5. **8.** 100. **9.** –1. **10.** 10; 100000. **11.** 1; 256. **12.** $\dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{\sqrt[8]{10}}$. **13.** 6; 11**.** **14.** 27. **15.** –3.

Уравнения с выборкой корней

1. $1; \log_3 5,\quad \log_3 5$. **2.** $2; \log_2 7,\quad \log_2 7$. **3.** $\log_{\frac{3}{2}} 3; \log_{\frac{3}{2}} 4,\ \log_{\frac{3}{2}} 3$. **4.** $-4; 0, 0$. **5.** $0; -\log_2 19,\quad -\log_2 19$. **6.** $\log_2 3; \log_2 5,\ \log_2 5$. **7.** $\log_3 2; \log_3 7,\ \log_3 7$. **8.** $\dfrac{1}{2}; 2, \dfrac{1}{2}$. **9.** $\pm\sqrt{2}; \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2}$. **10.** $-2; 1, -2$. **11.** $2; 2\sqrt{2}, 2$. **12.** $-2; 16,\ -2$. **13.** $2\sqrt{2}; 4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$. **14.** 4.

Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

Вычисления и преобразования

1. (–6). **2**. 36. **3.** (–4). **4.** 12. **5.** 1. **6**. 8. **7.** 0,5. **8.** –0,75. **9.** –2. **10.** –22. **11.** –4. **12.** –6. **13.** –2. **14.** –5. **15.** 2. **16.** 0,4. **17.** 50. **18.** 2. **19.** 0,75. **20.** 0,3. **21.** –0,2. **22.** 48. **23.** –18. **24.** –0,2.

Тригонометрические уравнения

1. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

2. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\quad \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

3. $\left\{\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

4. $\left\{2\pi k, \pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

5. $\left\{\pi k;\quad -\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z\right\}.$

6. $\left\{\pi k;\quad \dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z\right\}.$

7. $\left\{2\pi k;\quad \pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

8. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\quad \dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\quad \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

9. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\quad \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

10. $\left\{\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

11. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\quad \pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

12. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\quad \dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\quad \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

13. $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

14. $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k, k\in Z\right\}.$

15. $\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

16. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi k;\quad \dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

17. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z\right\}.$

18. $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad \frac{\pi}{6}+2\pi k;\quad \frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

19. $\left\{\pi k;\quad \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

20. $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\quad -\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z\right\}.$

Уравнения смешанного типа

1. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z\right\},\quad \frac{21\pi}{4};\frac{25\pi}{4}.$

2. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad -\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}.$

3. $\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad -\frac{9\pi}{4};-\frac{7\pi}{4}.$

4. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k;\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad \frac{17\pi}{6};\frac{19\pi}{6};\frac{23\pi}{6}.$

5. $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{6}+2\pi k;-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad \frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6};\frac{5\pi}{2}.$

6. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad \frac{11\pi}{6};\frac{13\pi}{6}.$

7. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad \frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}.$

8. $\left\{-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\}.$

9. $\left\{\pi+2\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad 3\pi;\frac{11\pi}{3}.$

10. $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad -\frac{19\pi}{6}.$

11. $\{\pi k, k\in Z\},\quad 2\pi;3\pi.$

12. $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z\right\},\quad -\frac{7\pi}{4};-\frac{5\pi}{4}.$

13. $\left\{\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\right\}$, $\quad \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$.

14. $\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z\right\}$, $\quad -\frac{21\pi}{4}; -\frac{9\pi}{2}$.

15. $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}$, $\quad \frac{35\pi}{6}$.

16. $\left\{\pi - arcctg\frac{4}{3}+2\pi k, k\in Z\right\}$, $\quad 3\pi - arcctg\frac{4}{3}; 5\pi - arcctg\frac{4}{3}$.

17. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z\right\}$, $\quad -\frac{11\pi}{3}$.

18. $\left\{\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}$, $\quad 2\pi; \frac{17\pi}{6}; 3\pi$.

19. $\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}$, $\quad \frac{13\pi}{6}$. **20.** 0.

Учебное издание

Антипина Наталья Валерьевна
Баенхаева Аюна Валерьевна
Леонова Ольга Васильевна
Тимофеев Сергей Викторович

Математика

Учебное пособие
для слушателей подготовительных образовательных программ

Издается в авторской редакции

Подписано в использование 07.05.20.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
http://bgu.ru.