

## МНОГОФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА ФУКО

**Аннотация.** Маятник Леона Фуко представляет собой точечную массу, подвешенную на жесткой нити над поверхностью Земли. При колебательном движении маятника на точечную массу оказывают действие силы притяжения Земли, Солнца, Луны, центробежная сила и сила Кариолиса, связанные с вращением Земли вокруг своей оси. Фуко в 1851 г. обнаружил, что плоскость, в которой движется маятник, поворачивается с заметной скоростью. Представлено строгое вычисление скорости поворота плоскости колебаний маятника Фуко, которое использует перенормировку логарифмически расходящихся интегралов по методу В.С. Владимирова.

**Ключевые слова.** Теория маятника Фуко, перенормировка расходящихся интегралов в теории маятника Фуко, поворот плоскости колебаний маятника, сила Кариолиса, математический маятник на поверхности Земли.

**Информация о статье.** Дата поступления: 8 февраля 2021 г.

A.V. Borovsky

Baikal State University,  
Irkutsk, Russian Federation

## MULTI-FACTOR ANALYSIS OF THE MOTION OF FOUCAULT'S PENDULUM

**Abstract.** Leon Foucault's pendulum is a point mass suspended on a rigid thread above the Earth's surface. During the oscillatory motion of the pendulum, the gravitational forces of the Earth, the Sun, the Moon, the centrifugal force and the Karyolis force, associated with the rotation of the Earth around its axis, act on a point mass. In 1851 Foucault discovered that the flat surface, in which the pendulum moves, rotates at a noticeable speed. The article presents a rigorous calculation of the rate of rotation of the flat surface oscillations of the Foucault pendulum, using the renormalization of logarithmically divergent integrals according to the method of V.S. Vladimirova.

**Keywords.** Foucault's pendulum theory, renormalization of divergent integrals in Foucault's pendulum theory, rotation of the oscillation of flat surface of the pendulum, Cariolis force, mathematical pendulum on the Earth's surface.

**Article info.** Received 8 February 2021.

История маятника Леона Фуко хорошо известна<sup>1</sup>. Описаны также многочисленные экспериментальные реализации маятника Фуко<sup>2</sup>. Однако, попытки автора данной работы найти теорию маятника Фуко к успеху не привели. В связи с чем автор решил самостоятельно решить задачу о повороте плоскости колебаний

<sup>1</sup> Маятник Фуко // Википедия. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/>; Большая российская энциклопедия. URL: <https://bigenc.ru/>

<sup>2</sup> Там же.

маятника Фуко. Прodelав соответствующие вычисления, автору стало понятно, что задача не могла быть решена в XIX в. и всего скорее до середины XX в. Задачу удалось решить только с применением теории перенормировок расходящихся интегралов. Такая теория изложена, например, в книге выдающегося математика XX в. академика В.С. Владимирова [1], которая вышла в 1971 г.

Итак, перейдем к рассмотрению задачи. На маятник Фуко действуют следующие силы: притяжение Земли, Солнца, Луны, центробежная сила, связанная с суточным вращением Земли вокруг своей оси, сила Кариолиса, также связанная с суточным вращением Земли.

Оценим величину этих сил. В табл. 1 собраны основные параметры задачи

Таблица 1

**Параметры, фигурирующие в задаче о маятнике Фуко**

Масса Солнца	$M_c = 1,98 \times 10^{30} \text{ кг}$
Масса Луны	$M_l = 7,35 \times 10^{22} \text{ кг}$
Средний радиус орбиты Земли	$R_{oz} = 1,50 \times 10^{11} \text{ км}$
Средний радиус орбиты Луны	$R_{ол} = 3,85 \times 10^8 \text{ м}$
Радиус Земли	$R_z = 6,34 \times 10^6 \text{ м}$
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \text{ СИ}$
Ускорение свободного падения Земли	$g = 9,8 \text{ СИ}$
Угловая скорость вращения Земли	$\Omega = 7,29 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$

Ускорение свободного падения Солнца на поверхности Земли равно

$$g_c = \gamma \frac{M_c}{R_{oz}^2} = 0,60 \cdot 10^{-3} g. \quad (1)$$

Ускорение свободного падения Луны на поверхности Земли составляет

$$g_l = \gamma \frac{M_l}{R_{ол}^2} = 0,33 \cdot 10^{-5} g. \quad (2)$$

Ускорение, которое создает центробежная сила

$$g_{ц} = \Omega \times R_z \times \Omega \rightarrow g_{ц} = R_z \Omega^2 \sin \varphi_{ш}. \quad (3)$$

Здесь  $\varphi_{ш}$  широта местности в градусах. Оценка для  $\varphi_{ш} = 45^\circ$  дает

$$g_{ц} = R_z \Omega^2 \sin \varphi \cong 2,38 \times 10^{-3} g.$$

Центробежная сила дает постоянную добавку к напряженности поля тяготения Земли (к ускорению свободного падения). Эта добавка перпендикулярна к оси вращения Земли.

Сила Кариолиса<sup>3</sup> зависит от скорости движения груза маятника Фуко. Оценим ее из закона сохранения энергии. Кинетическая энергия маятника в нижней точке равна потенциальной энергии подъема в поле тяготения Земли

$$\frac{mv^2}{2} = mgh. \quad (4)$$

От массы груза ничего не зависит

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (5)$$

Примем  $h=1$  м, тогда  $v = \sqrt{20} \cong 4,47$  м/с. Максимальная оценка силы Кариолиса получается, когда скорость груза направлена в широтном направлении (минимальная – когда скорость направлена по меридиану)

$$g_{\kappa} = 2v\Omega \cong 0,65 \times 10^{-4} g. \quad (6)$$

Выпишем в табл. 2 возмущения, которые вносят 4 различные причины

Таблица 2

**Возмущения, влияющие на движение маятника Фуко**

Земля	$g$
Солнце	$0,60 \times 10^{-3}g$
Луна	$0,33 \times 10^{-5}g$
Центробежная сила	$2,38 \times 10^{-3}g$
Сила Кариолиса	$0,65 \times 10^{-4}g$

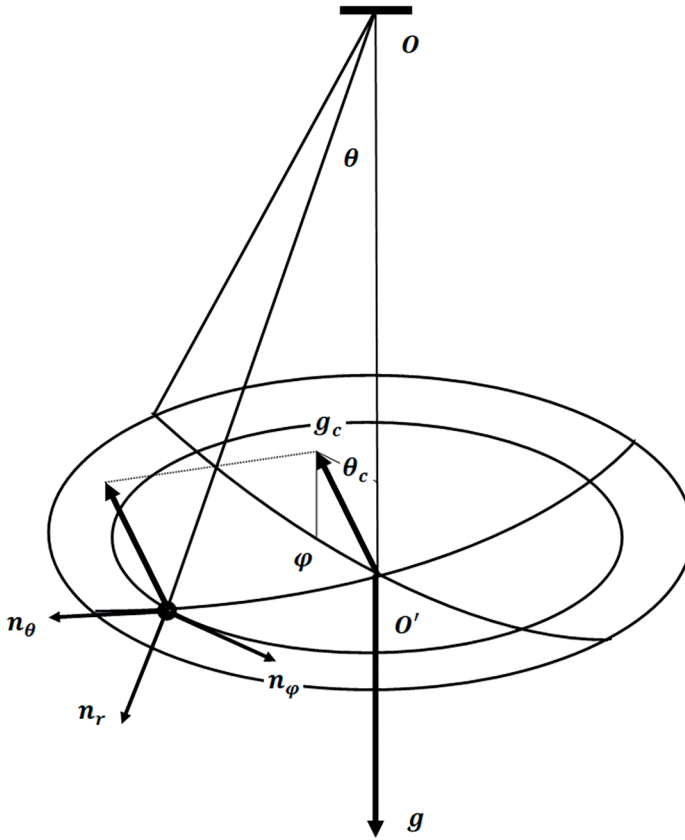
Выясним влияние тяготения Солнца. Оно вызывает силу притяжения, которая направлена строго на свой центр. Эта добавка к тяготению Земли является адиабатической (медленной). Вектор силы, вызываемой Солнцем, вращается вместе с движением светила по небосводу.

Для строгого выяснения поставленного вопроса следует решить двумерную задачу о движении шарика внутри сферической поверхности с учетом адиабатического возмущения вектора ускорения свободного падения силой притяжения Солнца.

### Солнце

Рассмотрим задачу о движении маятника Фуко под воздействием возмущающей силы тяготения Солнца. Земля создает ускорение свободного падения  $g$ , вектор которого направлен вертикально вниз, рис. 1. Солнце создает возмущающее ускорение

<sup>3</sup> Сила Кариолиса // Википедия. URL: <https://wikipedia.org/>.



*Рис. 1. Сферическая система координат для описания маятника Фуко*

$g_c \ll g$ , направленное под углами  $\theta_c$  и  $\varphi_c$  в сферической системе координат с центром в точке подвеса маятника Фуко. Здесь  $\theta$  — зенитный угол, который вектор составляет с вертикальной осью сферической системы координат,  $\varphi$  — полярный угол, который вектор составляет в перпендикулярной вертикали плоскости по отношению к некоторому начальному положению. Угол  $\varphi$  отсчитывается против часовой стрелки. В качестве начального положения можно выбрать плоскость колебаний маятника в начальный момент времени.

Вектор ускорения свободного падения Солнца направлен строго в центр Солнца на небосводе. Этот вектор медленно вращается вместе с солнцем, отслеживая его положение на небосводе, и описывает поверхность близкую к широкому конусу. Таким образом углы  $\theta_c$  и  $\varphi_c$  медленно меняются в зависимости от времени суток.

Для записи уравнений динамики Ньютона для массы маятника Фуко введем вспомогательную систему координат в точке

нахождения массы, рис. 1. Единичные орты вспомогательной системы координат даются следующими выражениями в основной сферической системе координат

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\theta &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta), \\ \mathbf{n}_\varphi &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \\ \mathbf{n}_r &= (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Легко проверить, что модуль каждого орта равен единице. Вектор  $\mathbf{g}_c$  запишем в виде

$$\mathbf{g}_c = g_c \mathbf{n}_c, \quad \mathbf{n}_c = (\sin\theta_c \cos\varphi_c, \sin\theta_c \sin\varphi_c, \cos\theta_c). \quad (8)$$

Маятник Фуко обладает двумя степенями свободы. Его скорость можно разложить на две взаимно ортогональные компоненты. Запишем уравнения движения для этих компонент  $\mathbf{v} = (v_\theta, v_\varphi)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_\theta &= -g \sin\theta + (\mathbf{g}_c \cdot \mathbf{n}_\theta), \\ \frac{d}{dt} v_\varphi &= (\mathbf{g}_c \cdot \mathbf{n}_\varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Масса груза из уравнений выпадает. Компоненты скорости записываются в виде

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad v_\varphi = r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}. \quad (10)$$

В первом уравнении (9) пренебрежем малой добавкой  $g \gg (\mathbf{g}_c \cdot \mathbf{n}_\theta)$ , которая не приводит к качественному изменению решений. Тогда система уравнений (9) распадается на два независимых уравнения. Первое описывает колебания маятника в вертикальной плоскости, а второе описывает поворот плоскости колебаний.

Второе уравнение принимает следующий вид

$$\frac{d}{dt} \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g_c}{r} (\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n}_\varphi). \quad (11)$$

Очевидно, что

$$(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{n}_\varphi) = \sin\theta_c \sin(\varphi_c - \varphi). \quad (12)$$

Первое уравнение рассмотрим в режиме малых колебаний. Тогда оно имеет решение

$$\theta(t) = \theta_r \sin\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}. \quad (13)$$

$\theta_r \ll 1$  – граничное значение угла, определяемое из начальных условий задачи. В результате приходим к следующему уравнению

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t \frac{d\varphi}{dt} = \frac{g_c}{r\theta_r} \sin \theta_c \sin(\varphi_c - \varphi). \quad (14)$$

Заменами переменных

$$\omega t = \tau, \quad \beta = \varphi_c - \varphi, \quad (15)$$

уравнение (14) несколько упрощается

$$\frac{d}{d\tau} \sin \tau \frac{d\beta}{d\tau} = -A \sin \beta. \quad A = \frac{g_c}{r\theta_r \omega^2} \sin \theta_c = \frac{g_c}{\theta_r g} \sin \theta_c. \quad (16)$$

Уравнение (16) следует решить на одном периоде колебаний  $0 < \tau < 2\pi$  с начальными условиями

$$\beta(0) = \beta_0, \quad \dot{\beta}(0) = 0$$

Угол  $\beta$  мало меняется на одном периоде колебаний маятника, поэтому

$$\begin{aligned} \sin \tau \frac{d\beta}{d\tau} &= -A \sin \beta \tau \\ \frac{d\beta}{\sin \beta} &= -A \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} \end{aligned}$$

Можно предложить следующую формулу изменения угла  $\beta$  за один период колебаний

$$\Delta\beta = -A \sin \beta \int_0^{2\pi} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau}. \quad (17)$$

Удобнее интегрировать за один ход маятника вперед и один назад

$$\Delta\beta = -A \sin \beta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau}. \quad (18)$$

В точке  $\tau = 0$  интеграл сходится. В точке  $\tau = \pi$  интеграл имеет логарифмическую расходимость, которая устраняется перенормировкой интеграла по В.С. Владимирову. В самом деле

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} = 4G, \quad (19)$$

где  $G$  — постоянная Каталана

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0,915965 \dots$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi-x)d(\pi-x)}{\sin(\pi-x)} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+x)d(\pi+x)}{\sin(\pi+x)} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-x)dx}{\sin x} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+x)dx}{\sin x} = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin x} = -4G \end{aligned}$$

В результате получаем, что интеграл в (18) равен нулю

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\tau d\tau}{\sin \tau} = 0. \quad (20)$$

Это означает, что сила притяжения солнца **не поворачивает** плоскость колебаний маятника Фуко! Маятник в рассмотренной задаче движется по замкнутой траектории типа сплюснутой восьмерки. Поперечные отклонения маятника на ходе вперед и назад взаимно компенсируют друг друга.

### Луна

Для силы притяжения Луны выводы будут такими же как для Солнца. Рассмотрение ничем не отличается от представленного выше.

### Центробежная сила

Центробежную силу можно исключить из причин, поворачивающих плоскость колебаний маятника Фуко. Эта сила в системе отсчета связанной с Землей постоянна по величине. Она приводит к небольшому постоянному смещению направления вектора  $g$ .

### Сила Кариолиса

Вектор угловой скорости Земли составляет зенитный угол  $\theta_{\text{ш}}$  с вертикальной осью маятника Фуко. Этот угол связан с широтой местности

$$\theta_{\text{ш}} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{ш}}. \quad (21)$$

Вектор  $\Omega$  запишем в виде

$$\Omega = \Omega n_\Omega, n_\Omega = (\sin\theta_\Omega, 0, \cos\theta_\Omega). \quad (22)$$

Поворотом сферической системы координат можно обратить в ноль вторую поперечную координату.

Запишем векторное произведение

$$v \times \Omega = \begin{vmatrix} n_\theta & n_\varphi & n_r \\ v_\theta & v_\varphi & 0 \\ \Omega \cdot n_\theta & \Omega \cdot n_\varphi & \Omega \cdot n_r \end{vmatrix}$$

Нас будет интересовать компонента силы Кариолиса<sup>4</sup>, которая поворачивает плоскость колебаний маятника

$$\begin{aligned} 2[v \times \Omega] \big|_\varphi &= -2n_\varphi v_\theta (\Omega \cdot n_r) = -2n_\varphi \Omega v_\theta (n_\Omega \cdot n_r) = \\ &= -2n_\varphi \Omega v_\theta (\cos\theta \cos\theta_\Omega - \sin\theta \cos\varphi \sin\theta_\Omega). \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно теореме Кариолиса<sup>5</sup> в выражении для силы Кариолиса фигурирует двойка. Уравнение движения принимает вид

$$\frac{d}{dt} v_\varphi = -2\Omega v_\theta (\cos\theta \cos\theta_\Omega - \sin\theta \cos\varphi \sin\theta_\Omega). \quad (24)$$

Или

$$\frac{d}{dt} \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = -2\Omega \frac{d\theta}{dt} (\cos\theta \cos\theta_\Omega - \sin\theta \cos\varphi \sin\theta_\Omega). \quad (25)$$

В приближении малых колебаний

$$\frac{d}{dt} \sin\omega t \frac{d\varphi}{dt} = -2\Omega \omega \cos\omega t (\cos\theta_\Omega - \theta_r \sin\omega t \cos\varphi \sin\theta_\Omega). \quad (26)$$

Результат первого интегрирования следующий

$$\sin\omega t \frac{d\varphi}{dt} = -2\Omega \cos\theta_\Omega (\sin\omega t - 1) - \Omega \theta_r \cos\varphi \sin\theta_\Omega (1 + \cos 2\omega t). \quad (27)$$

Второе слагаемое является малой поправкой, опустим его.

Результат второго интегрирования

$$\Delta\varphi = -2\Omega \cos\theta_\Omega t + 2\Omega \cos\theta_\Omega \int_0^t \frac{dt}{\sin\omega t}$$

<sup>4</sup> Сила Кориолиса // Википедия. URL: <https://wikipedia.org/>.

<sup>5</sup> Там же.



Согласно теории перенормировки расходящихся интегралов по В.С. Владимирову, интеграл в правой части по областям монотонности синуса равен нулю. Логарифмические расходимости противоположных знаков компенсируют друг друга.

Получаем для скорости поворота плоскости колебаний

$$\frac{d\varphi}{dt} = -2\Omega \cos\theta_{\text{ш}} = -2\Omega \sin\varphi_{\text{ш}}. \quad (28)$$

Отметим, что в отличие от (28), в статье «Маятник Фуко» в Википедии<sup>6</sup> пропущена двойка в силе Кариолиса! То же в Большой российской энциклопедии. В обоих изданиях отсутствует вывод формулы для угла поворота плоскости колебаний, поэтому проверить приводимую формулу невозможно.

Автор работы [2] считает, что при движении маятника Фуко нарушается закон сохранения энергии. На это можно сказать следующее. Законы сохранения в механике являются следствием (интегралами) уравнений движения. Движение маятника Фуко рассматривается в неинерциальной системе отсчета, каковой является Земля, вращающаяся относительно своей оси. В неинерциальной системе отсчета общепринятые для инерциальных систем отсчета законы сохранения не выполняются. Нужно записывать уравнения движения маятника Фуко относительно Земли и исследовать их на наличие интегралов движения. Такое исследование, по-видимому, не проводилось, во всяком случае автору данной статьи неизвестно.

### Заключение

В работе проведен системный анализ движения маятника Фуко. Рассмотрены 4 фактора, которые в принципе могли бы повлиять на движение маятника. Это силы тяготения со стороны Солнца и Луны и силы, обусловленные вращением Земли вокруг своей оси. К ним относятся центробежная сила и сила Кариолиса. Строгое решение задачи приводит к необходимости вычисления расходящихся интегралов. Такие вычисления выполнены с привлечением теории перенормировки расходящихся интегралов по В.С. Владимирову. Получена строгая формула для скорости поворота плоскости колебаний маятника Фуко. Подтверждено, что Солнце, Луна и центробежная сила не влияют на скорость поворота плоскости колебаний маятника. Поворот плоскости колебаний обусловлен силой Кариолиса. Обнаружена ошибка в два раза в скорости поворота плоскости колебаний маятника Фуко в Википедии и Большой российской энциклопедии, что, по мнению автора, обусловлено пропуском двойки в выражении для силы Кариолиса.

<sup>6</sup> Маятник Фуко // Википедия. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/>

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — Москва : Наука, 1971. — 512 с.
2. Ерашов В. Маятник Фуко-парадоксы теории / В. Ерашов // Проза.ру. — URL: <https://proza.ru/2015/06/11/352>.

## REFERENCES

1. Vladimirov V.S. *Urvneniya matematicheskoi fiziki* [Mathematical Physics Equations] Moscow, Nauka Publ., 1971. 512 p.
2. Erashov V. Foucault's pendulum — paradoxes of theory. *Proza.ru*. (In Russian).

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

**Боровский Андрей Викторович** — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: [andrei-borovskii@mail.ru](mailto:andrei-borovskii@mail.ru).

## INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Andrey V. Borovsky** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: [andrei-borovskii@mail.ru](mailto:andrei-borovskii@mail.ru).

## ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ

Боровский А.В. Многофакторный анализ движения маятника Фуко / А.В. Боровский // System Analysis & Mathematical Modeling. — 2021. — Т. 3, № 1. — С. 16–25.

## FOR CITATION

Borovsky A.V. Multi-Factor Analysis of the Motion of Foucault Pendulum. *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2021, vol. 3, no. 1, pp. 16–25. (In Russian).